Introdução à Inferência Bayesiana

Démerson André Polli

ENAP - 09/01/2020 (aula 05)

Modelos de Espaço de Estados

O modelo de espaço de estados linear gaussiano é definido em 3 partes:

- Equação de estados:

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\xi_t,\ \xi_t \sim N(0, Q_t)$$

- Equação de observação:

$$y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim N(0, H_t)$$

- Estado inicial: $\alpha_1 \sim N(\alpha, \theta)$.
- ξ_t e ϵ_t são independentes.
- y_t pode ser multivariado.
- O vetor α_t é não observável$
- As matrizes T_t, Z_t, R_t, Q_t e H_t determinam a estrutura do modelo.

Filtro de Kalman (I)

Nos modelos de espaço de estados, os estados α_t podem ser estimados usando um *filtro de Kalman*:

$$\nu_t = y_t - Z_t a_t,$$

$$F_t = Z_t P_t Z_t' + H_t$$

$$K_t = T_t P_t Z_t' F_t^{-1}$$

$$a_{t+1} = T_t a_t + K_t \nu_t$$

$$P_{t+1} = T_t P_t T_t' + R_t Q_t R_t' - K_t F_t K_t'$$

para $t = 1, 2, \ldots, n$ e com valores iniciais dados α_1 e P_1.

Filtro de Kalman (II)

Tomando $\boldsymbol{Y}_t = \{y_1, \ldots, y_t\}$,

$$a_{t+1} = \mathbb{E}(\alpha_{t+1}|\boldsymbol{Y}_t), \quad P_{t+1} = \mathbb{V}(\alpha_{t+1}|\boldsymbol{Y}_t).$$

No modelo de espaço de estados

$$\alpha_{t+1} = T_t\alpha_t + R_t\xi_t,\ y_t = Z_t\alpha_t + \epsilon_t,$$

tomando $\boldsymbol{Y}_t = \{y_1, \ldots, y_t\}$,

$$a_{t+1} = \mathbb{E}(\alpha_{t+1}|\boldsymbol{Y}_t), \quad P_{t+1} = \mathbb{V}(\alpha_{t+1}|\boldsymbol{Y}_t).$$

Filtro de Kalman (III)

O erro de previsão é

$$\nu_t = y_t - \mathbb{E}(y_t|\boldsymbol{Y}_{t-1})$$

$$\nu_t = y_t - \mathbb{E}(Z_t\alpha_t + \epsilon_t|\boldsymbol{Y}_{t-1})$$

$$\nu_t = y_t - Z_t\mathbb{E}(\alpha_t|\boldsymbol{Y}_{t-1})$$

$$\nu_t = y_t - Z_t a_t.$$

Seque que $\nu_t = Z_t(\alpha_t - a_t)$ e $\mathbb{E}(\nu_t) = 0$.

A variância de predição é $\nu_{\mathrm{t}} = F_t = Z_t P_t Z_t' + H_t$.

Filtro de Kalman (IV)

- O filtro de Kalman permite calcular a média e variância dos estados não observados a partir das observações.
- O estado é gaussiano: a distribuição completa é caracterizada pela média e variância.
- O filtro é um algoritmo recursivo; a estimativa atual é atualizada sempre que uma novo valor é observado.
- Para iniciar a recursão é necessário que sejam fixados a_1 e P_1.

Modelos de espaço de estados multivariados (I)

O *modelo de nível local multivariado* é definido por

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1} = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}})$$

- Observações são vetores de dimensão p.
- Os distúrbios $\boldsymbol{\epsilon}_t$ e $\boldsymbol{\eta}_s$ são independentes para todo t e s.
- As p diferentes séries temporais são relacionadas através das correlações nas matrizes $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}}$.
- A primeira diferença $\Delta \boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\eta}_{t-1} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_t$ é uma série estacionária.

Modelos de espaço de estados multivariados (II)

O *modelo de níveis comuns* é definido por

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1} = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad \boldsymbol{\eta}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}})$$

em que $\mathrm{posto}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}}) = r < p$.

- O modelo pode ser descrito por r componentes chamados de *níveis comuns*.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{A}',$$

em que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $p \times r$ e $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}}$ é $r \times r$ de posto completo.

- A matriz $\boldsymbol{A}$ é uma matriz de cargas fatoriais.

Modelos de espaço de estados multivariados (III)

O *modelo de níveis local comuns* pode ser escrito em função dos níveis:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_t^c + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}})$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t+1}^c = \boldsymbol{\mu}_t^c + \boldsymbol{\eta}_t^c, \quad \boldsymbol{\eta}_t^c \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{c}})$$

de modo que

$$\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_t^c, \quad \boldsymbol{\eta}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_t^c.$$

Modelos de espaço de estados multivariados (IV)

No modelo de *níveis local comuns*,

- A decomposição $\boldsymbol{\Sigma}_\eta = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}_c\boldsymbol{A}'$ não é única.
- Existem restrições para identificação de $\boldsymbol{\Sigma}_c$:
  - $\boldsymbol{\Sigma}_c$ *é diagonal.*
  - *Pode ser obtida por decomposição de Choleski*
  - *Também pode ser obtida por componentes principais (com base na teoria econômica).*
- Interpretações interessantes podem ser obtidas com a rotação da matriz $\boldsymbol{A}$ de cargas fatoriais.
- O modelo também é chamado de *análise fatorial dinâmica*.

Modelos de espaço de estados multivariados (V)

- O filtro de Kalman é válido para os modelos de espaço de estados multivariados.
- Computacionalmente não é conveniente quando o número de séries simultâneas p cresce.
- Cada passo do filtro de Kalman requer a inversão de uma matriz $p \times p$, $\boldsymbol{F}_t$.

Modelos espaço-estados no R (I)

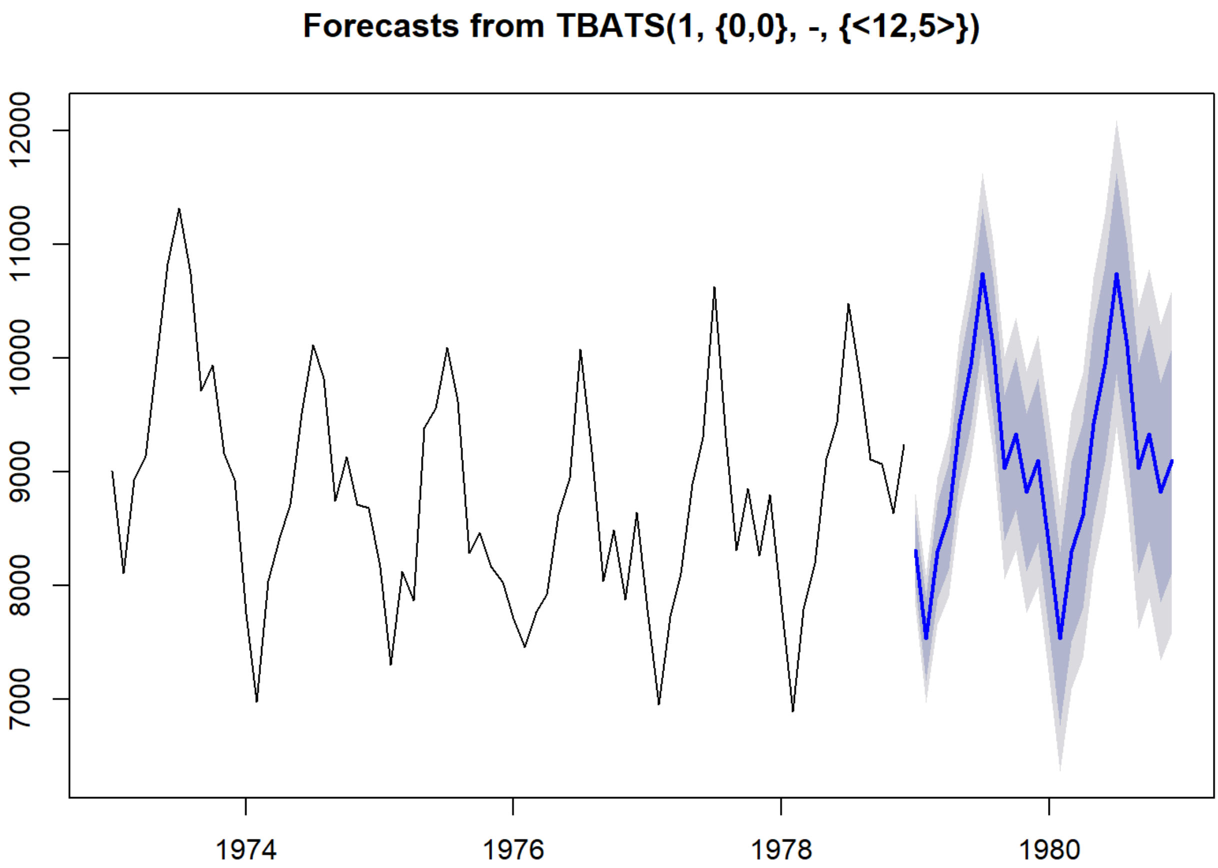
Existem alguns modelos da classe implementados no pacote `forecast`. Por exemplo,

```
if (!require("forecast")) install.packages("forecast")
library(forecast)
```

Modelos espaço-estados no R (II)

Existem alguns modelos da classe implementados no pacote `forecast`. Por exemplo,

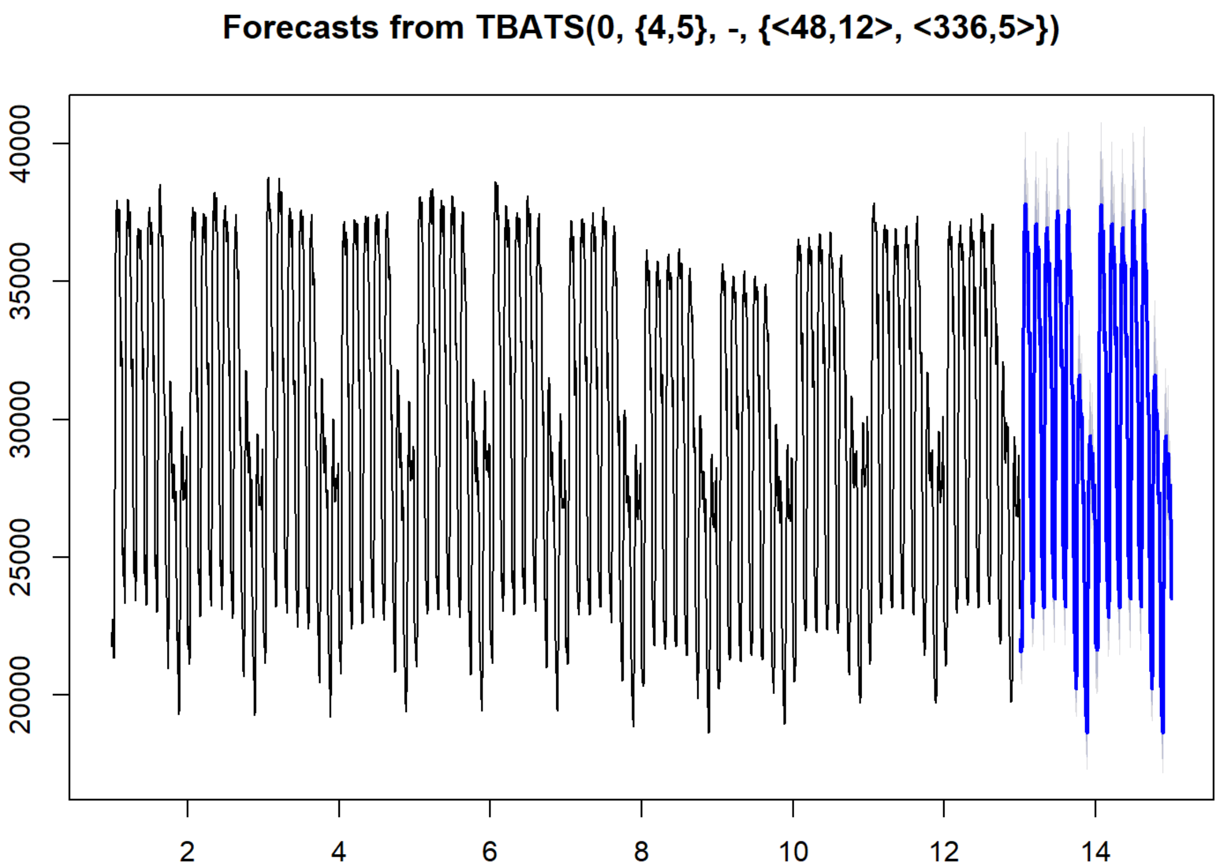
```
fit <- tbats(USAccDeaths)
plot(forecast(fit))
```



Modelos espaço-estados no R (III)

Existem alguns modelos da classe implementados no pacote `forecast`. Por exemplo,

```
taylor.fit <- tbats(taylor)
plot(forecast(taylor.fit))
```



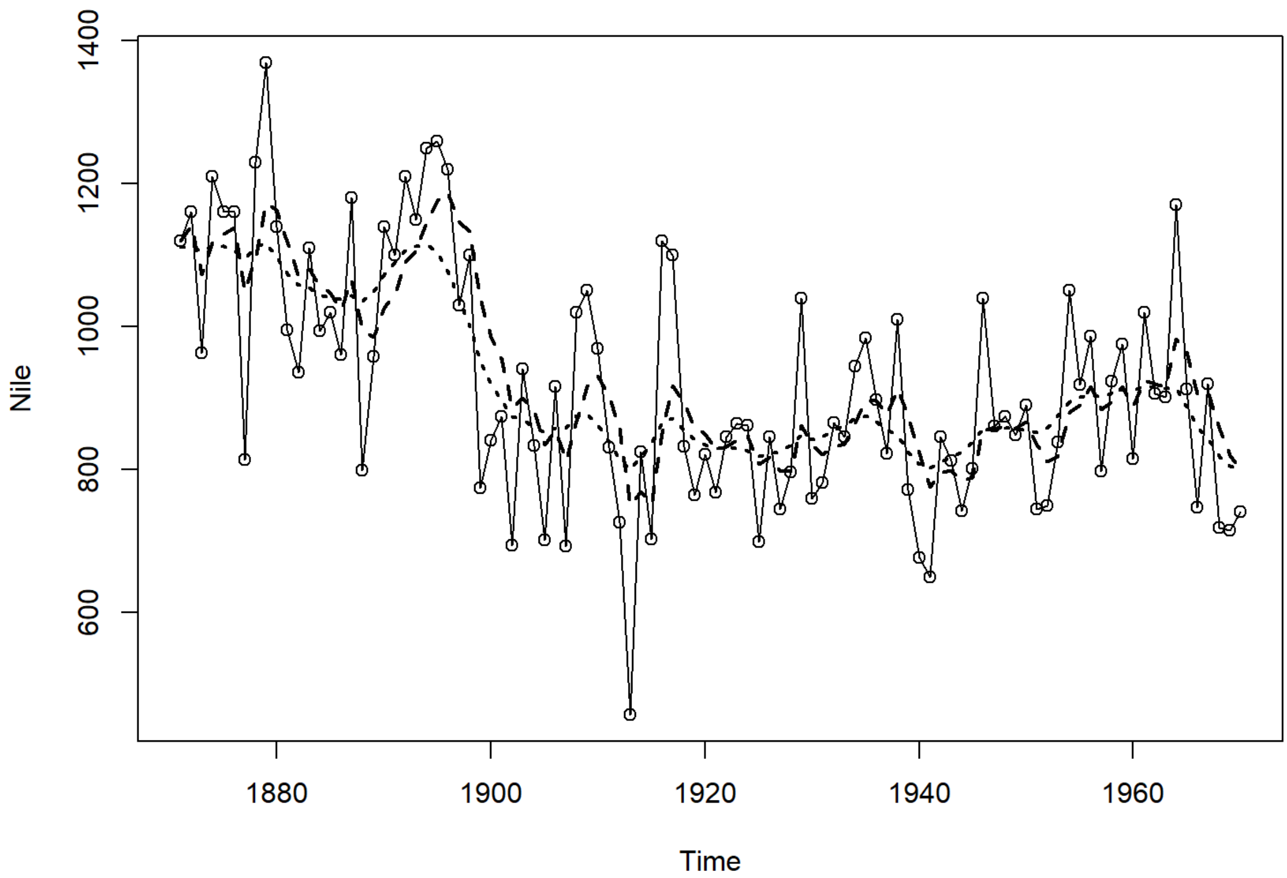
Modelos espaço-estados no R (IV)

```
fitNile <- StructTS(Nile, "level")
fitNile
```

```
##
## Call:
## StructTS(x = Nile, type = "level")
##
## Variances:
##   level  epsilon
##    1469    15099
```

Modelos espaço-estados no R (V)

```
plot(Nile, type = "o")
lines(fitted(fitNile), lty = "dashed", lwd = 2)
lines(tsSmooth(fitNile), lty = "dotted", lwd = 2)
```



Modelos espaço-estados no R (VI)

```
plot(forecast(fitNile, level = c(50, 90), h = 10), xlim = c(1950, 1980))
```