Enap Escola Nacional de Administração Pública

Programa Avaliação Socioeconômica de Projetos

Matemática Financeira

Brasília - 2015

Conteúdo para impressão

Fundação Escola Nacional de Administração Pública

Presidente
Gleisson Rubin

Diretor de Desenvolvimento Gerencial
Paulo Marques

Coordenadora-Geral de Educação a Distância
Natália Teles da Mota Teixeira

Conteudista

Ana Paula Cavalcanti(2013)

Diagramação realizada no âmbito do acordo de Cooperação Técnica FUB/CDT/Laboratório Latitude e Enap.

Enap

Unidade 2 - FLUXO DE CAIXA E VALOR PRESENTE

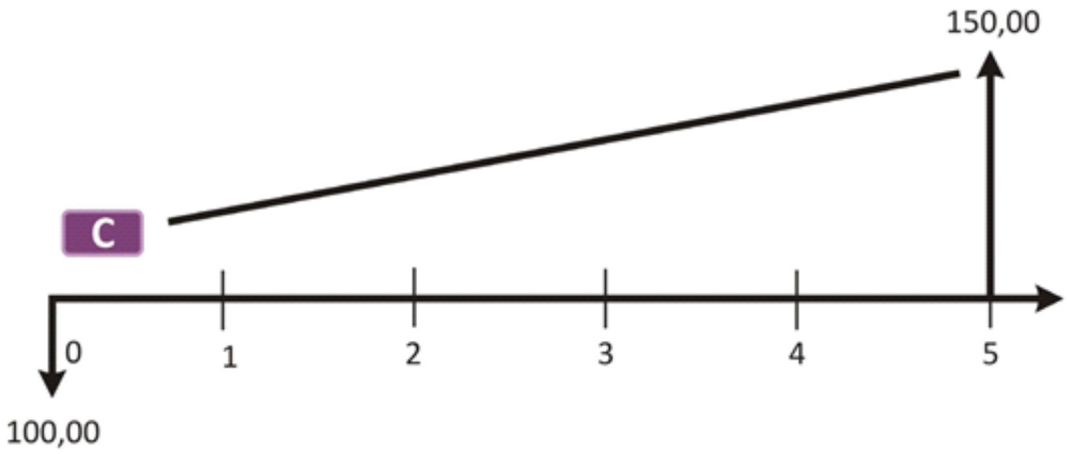
Ao final desta unidade, espera-se que você seja capaz de:

- Elaborar um diagrama de fluxo de caixa, dado o capital inicial, a taxa de juros e o período de capitalização.
- Selecionar a fórmula adequada para cálculo de valor presente e valor futuro, de acordo com o problema apresentado.

2.1 Valor Presente e Valor Futuro

Constitui-se como ferramenta fundamental para a avaliação de projetos a distinção entre o valor presente, ou atual, e o valor futuro. A ideia principal em relação ao valor presente e ao valor futuro é a de que o dinheiro não tem o mesmo valor em períodos distintos. Para analisar a relação custo-benefício de um projeto, é preciso, por exemplo, comparar valores a se receber em dez anos com valores investidos atuais. Como já vimos nas seções anteriores, podemos trazer os ganhos futuros para a data do início do projeto e, dessa forma, comparar com os valores investidos, apenas descontando a taxa de juros dos valores futuros, respeitando o regime de capitalização e o período no qual o valor se encontra. Se, ao contrário, deseja-se comparar um valor de hoje (presente) a um valor futuro, pode-se levar o valor presente ao instante futuro, por meio de capitalização de taxa de juros ao valor atual. O importante é que apenas podemos comparar valores absolutos no mesmo instante de tempo.

O valor futuro está relacionado com o valor presente pelas fórmulas já mencionadas no módulo 1, a partir disso podemos dizer que o valor futuro (VF) é igual ao montante (M), e o valor presente (VP) é igual ao capital inicial (C), para um dado valor.



Assim, o valor futuro (VF) de R$ 150,00 - considerando cinco períodos e a taxa de juros simples de 10% ao ano - equivale ao valor presente ou atual (VP) de R$ 100,00. No caso de utilizarmos os juros compostos, teremos que utilizar as fórmulas de juros compostos e, como consequência, o valor futuro no quinto período seria de R$ 161,05 .

Apenas relembrando M = C (1 + i)^n , logo M = 100,00 (1 + 0,1)^5 = 161,05.

Os valores somente podem ser comparados se estiverem referenciados na mesma data. Isso significa que operações algébricas apenas podem ser executadas com valores referenciados na mesma data.

O processo de análise de projetos depende de várias combinações para se calcular o retorno total dos projetos e escolher a melhor alternativa. Assim, é necessário elaborarmos um diagrama de fluxo de caixa (DFC).

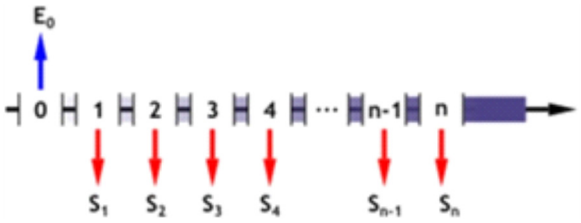
2.2 Diagrama de Fluxo de Caixa (DFC)

Consiste na representação gráfica da movimentação de recursos financeiros (entradas ou receitas e saídas ou despesas de fluxos de caixa) ao longo do tempo.

Na escala horizontal: está representado o tempo, as marcações temporais representam o número de períodos transcorridos e devem estar compreendidos entre 0 e n.

As setas ou segmentos de reta para cima consistem nas entradas ou recebimentos de dinheiro. As setas ou segmentos de reta para baixo referem-se às saídas de dinheiro ou pagamentos.

No exemplo abaixo, a pessoa tomou emprestado no período 0 e pagou em n vezes.



Assim, **E** , no tempo **t=0** , por ser um valor **recebido** do empréstimo (entrada de recurso), é representado no diagrama de fluxo de caixa (**DFC**) com uma seta para cima. Já a sequência de **S** é representada no **DFC** com setas para baixo, uma vez que são as parcelas **pagas** devido ao empréstimo (saída de recurso).

O tempo **n** é o período de capitalização.

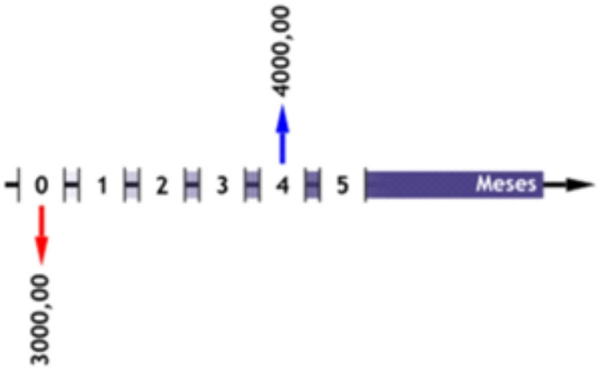
A taxa de juros (**i**) consiste no custo de oportunidade do dinheiro. Representa a medida relativa de incidência do valor do dinheiro no tempo. A taxa deve ser expressa na unidade equivalente ao período de capitalização, ou seja, se o tempo do DFC for expresso em anos, a taxa deve ser também expressa em termos anuais.

Vejamos alguns exemplos de **DFC**.

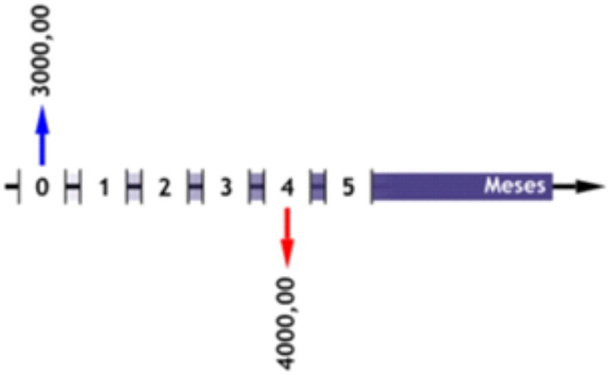
Exemplo 1 **Exemplo 2** **Exemplo 3**

Enap

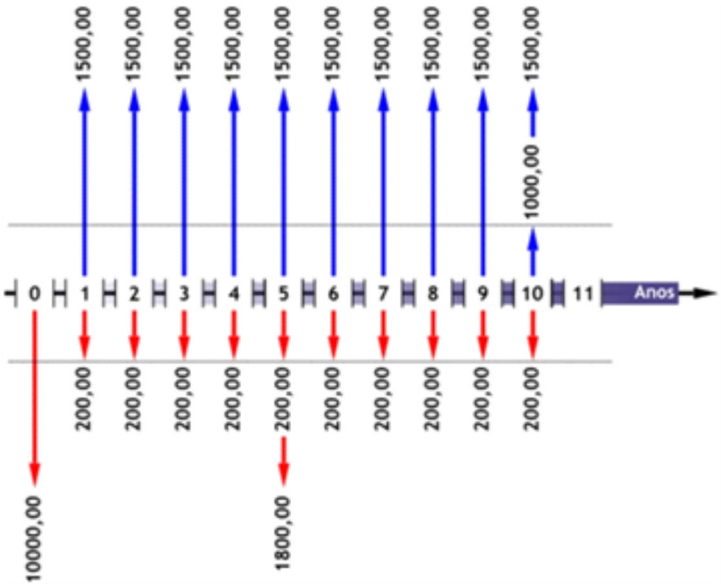
Represente o diagrama de fluxo de caixa (DFC) de um indivíduo que emprestou R$ 3.000,00 a um colega que irá lhe devolver R$ 4.000,00 ao final de 4 meses.



Represente o DFC, do ponto de vista do colega.



Sua empresa investiu R$ 10.000,00 na compra de uma máquina. Daqui a um ano e pelos próximos 10 anos, essa máquina irá lhe proporcionar uma receita bruta anual de R$ 1.500,00. Ao final do 10º ano, você irá vendê-la por R$1.000,00. As despesas anuais de manutenção do equipamento ficarão em torno de R$ 200,00 por ano e, ao final do quinto ano, será necessária uma revisão que lhe custará R$ 1.800,00. Represente o DFC.



Particularmente, quando temos uma sequência de pagamentos ou recebimento com valores nominais iguais e distribuídos em intervalos regulares de tempo, chamamos esses valores de anuidade ou prestação, que será representada neste curso por A.

Vejamos a seguir como transformarmos o valor futuro em valor presente, bem como o que deve ser considerado para a realização dessa transformação.

2.3 Relação entre Valor Futuro e Valor Presente

O valor futuro, em um período qualquer "n" , de uma quantia em dinheiro que hoje uma pessoa tem, é obtido pela capitalização dos juros gerados nesses n períodos. A fórmula para calcular o valor futuro segue abaixo. Repare que é a mesma que foi indicada para determinar o montante total no esquema de juros compostos [vide módulo 1, tópico 1.2.2].

$$M = F = VP.(1+i)^n$$

Note que M (montante total) foi substituído por VF (valor futuro), e C (capital inicial investido) pelo VP (valor atual ou valor presente), porque essas expressões são utilizadas na avaliação de projetos.

Quando um valor futuro é determinado, é necessário indicar o exato momento em que é calculado.

Como ocorre para qualquer fórmula de matemática financeira, deve haver correlação entre o número de períodos durante os quais o montante de dinheiro gera juros e a taxa efetiva de juros correspondente a cada período.

Exemplo 4 **Exemplo 5** **Exemplo 6**

Exemplo 4

Considere que você deseja determinar hoje o valor futuro de R$ 100,00 após um ano, considerando que a taxa efetiva semestral seja de 10%.

Como a taxa efetiva é semestral, vamos escrever o período em termos de semestres, ou seja, 1 ano = 2 semestres e, portanto, n assume o valor 2 (número de semestres em um ano). O valor futuro no momento t = 2 de um calendário semestral é o seguinte:

$$Vf2 = 100.(1,1)^2 = R\$\ 121,00$$

Também podemos trabalhar com períodos anuais: n assume o valor 1 e deve ser utilizada a taxa efetiva anual equivalente à taxa efetiva semestral de 10%, que equivale a 21% a.a.

Veja tópico 1.4 do módulo 1 e utilize a fórmula $(1 + i1)^{n1} = (1 + i2)^{n2}$.

Essa taxa é obtida ao capitalizarmos a taxa de juros de 10% as para os dois semestres. O valor futuro no momento t=1 de um calendário anual é:

$$Vf1 = 100.(1,21)^1 = R\$\ 121,00$$

Note que o valor futuro calculado nas duas maneiras é o mesmo R$ 121,00 após um ano e equivale a R$ 100,00 hoje.

Exemplo 5

Deseja-se determinar hoje o valor futuro de uma quantia de R$ 100,00 após 14 meses, a uma taxa efetiva semestral de 10%.

Nesse caso, é conveniente transformar a taxa efetiva semestral em uma taxa efetiva mensal (1,6012% a/m), que é obtida por meio da fórmula (1 + i1)^n1 = (1 + i2)^n2, em que i1 = 10% as, n1 = 1 (1 semestre) e n2 = 6 (6 meses). Resolvendo, chegamos a i 2 = ((1,10 ^ (1/6)-1)* 100) = 1,6012% a/m. O valor futuro no momento 14 de um calendário mensal é:

Vf14 = 100.(1,016012)^14 = R$ 124,91

Dessa forma, o valor R$ 124,91 em 14 meses equivale a R$ 100,00 hoje.

Exemplo 6

A fórmula de valor futuro pode ser adaptada para o caso em que a taxa de juros não permaneça constante através do tempo.

É possível calcular o valor futuro de uma quantia de R$ 100,00 após 6 meses, as taxas efetivas mensais (i m) de 1% a/m, durante os primeiros 4 meses, e de 1,5% a/m, durante os meses restantes:

Ou seja, os R$ 100,00 são capitalizados a 1% a/m, durante os primeiros quatro meses, e a 1,5% a/m, durante os 2 meses posteriores.

VF = 100.(1,01)^4.(1,015)^2 = R$ 107,21

Podemos também, da mesma forma, dado o valor futuro, calcular o valor presente. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 7 **Exemplo 8**

Exemplo 7

Qual o valor presente do valor futuro igual R$ 400,00, a ser recebido em um ano, se a taxa efetiva for de 2% bimestral? Temos VF = VP * (1 + i)^n, logo 400,00 = VP * (1 + 0,02)^6 (não esquecendo que o ano tem seis bimestres) => VP = R$ 355,19.

Se, hoje, uma pessoa deposita R$ 355,19 em um investimento que rende 2% por bimestre, irá obter R$ 400,00 após um ano.

Exemplo 8

Apresenta-se, neste caso, a aplicação da fórmula à situação em que a taxa de juros não é constante ao longo do tempo considerado.

O valor presente do valor futuro igual a R$ 400,00, a receber após um ano, se as taxas efetivas bimestrais vigentes forem de 1,5% ab, para os 4 primeiros bimestres, e de 2% ab, para os restantes, é igual a:

400 = [VP.(1+0,015)^4] (1+0,02)^2 => VP = R$ 362,24

Neste caso, aplica-se primeiro a fórmula para trazer o valor presente até o quarto bimestre. Por isso é que se utiliza 400/(1+0,015)^4 =R$ 376,87 e depois se utiliza esse valor resultante para trazê-lo até o início do período, utilizando 376,87/(1+0,02)^2=R$362,24.

2.4 Valor Presente – Séries de Pagamentos

Se, em vez de uma única quantia em dinheiro, forem várias e de valores diferentes, o valor atual ou presente do conjunto de recursos é obtido pela adição dos valores atuais ou presentes de cada uma:

VP = M1/(1+i)^1 + M2/(1+i)^2 + M3/(1+i)^3 + ... + Mn/(1+i)^n

Em que M i tem o mesmo significado que VF, mas, como tem valores diferentes, utilizamos essa nomenclatura.

Veja o **Exemplo 9**

Com a taxa efetiva anual de 10%, calcular o valor presente dos valores futuros: R$ 200,00 no prazo de um ano e R$ 300,00 dentro de dois anos.

Temos M1 = 200,00, pois é após um ano, e M2 = 300,00, pois é após 2 anos. O valor presente é determinado como segue:

VP = 200/(1+0,10)^1 + 300/(1+0,10)^2 = 429,75

Ou seja, para obter essas duas retiradas nos momentos indicados, R$ 429,75 devem ser depositados hoje.

Uma série de pagamento é definida formalmente como toda série finita ou infinita de entradas e saídas de caixa, com um dos objetivos abaixo.

1. Amortização de um empréstimo.
Ex.: financiamento imobiliário, crédito direto ao consumidor (CDC).

Enap

2. Capitalização de um montante.
Ex.: título de capitalização, poupança programada, consórcio.

3. Geração de uma renda permanente.
Ex.: plano de previdência, compra de imóvel para aluguel.

Uma série de pagamentos com prestações iguais pode ser classificada de acordo com o número de prestações ou parcelas, e também quanto ao momento do pagamento da primeira. Dependendo do número de prestações, são chamadas de:

- Plano de anuidades: quando o número de prestações é finito.
- Plano de perpetuidades: quando se trata de prestações intermináveis (infinito).

A classificação das prestações, tendo em conta o momento de pagamento da primeira parcela, contado a partir do momento de execução da operação, exige que os prazos sejam definidos de acordo com o calendário das prestações. Elas são chamadas de:

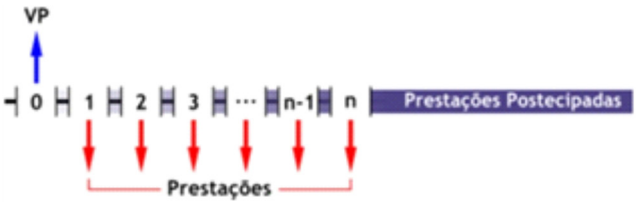
- Plano de prestações **vencidas** (postecipadas): quando a primeira é paga ao final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é vencido quando a primeira é paga ao final do primeiro mês.
- Plano de prestações **adiantadas** (antecipadas): quando a primeira é paga no início do primeiro período. Por exemplo, se as parcelas são prestações mensais, o plano é de prestações adiantadas, se a primeira é paga no início do primeiro mês.
- Plano de prestações **diferidas:** quando a primeira cota é paga em algum momento futuro que não seja o final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é de prestações diferidas, se a primeira é paga no final do segundo mês ou mais tarde.

O pagamento **postecipado** ocorre quando o pagamento das prestações começa ao final do primeiro período, ou seja, em t = 1.

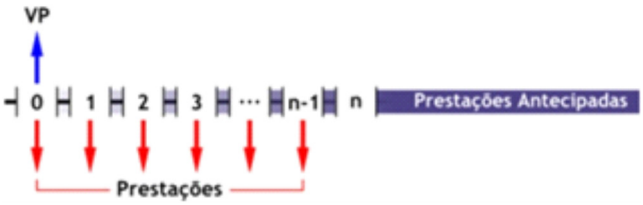
O pagamento **antecipado** ocorre quando o pagamento das prestações começa no início do primeiro período, ou seja, em t = 0.

O pagamento **diferido** ocorre quando a primeira prestação começa no fim do período q, ou seja, em t = q.

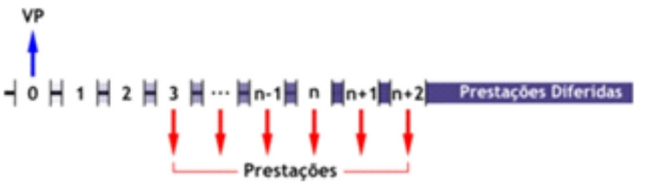
A seguir, temos um exemplo gráfico de pagamentos de prestações postecipadas:



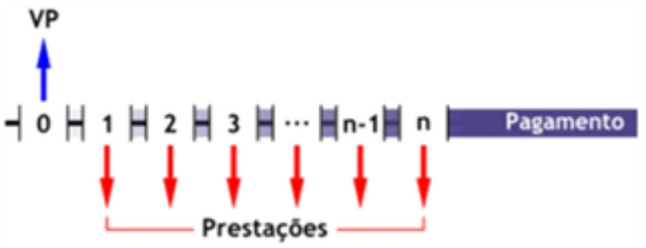
Veja um exemplo gráfico de pagamentos de prestações antecipadas.



E veja um exemplo gráfico de pagamentos de prestações diferidas.



2.5 Valor Presente - Parcelas Vencidas



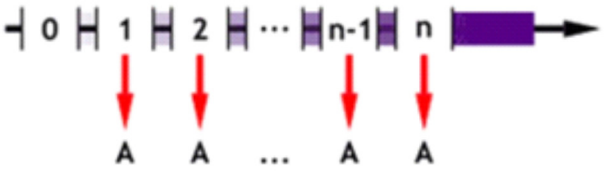
O gráfico acima representa a situação de um valor presente de um pagamento postecipado de prestações iguais, em n períodos.

As n anualidades vencidas são distribuídas no tempo, segundo o seguinte calendário:

Tempo **0 1 2... n**

Distribuição das prestações **0AA...**

A, na qual A é o valor de cada uma das prestações



O valor presente desse conjunto de n prestações é:

$$VP = S_{n1} A/(1+i)^n = A/(1+i)^1 + ... + A/(1+i)^n$$

A fórmula para calcular o valor atual resultante de um pagamento de n prestações iguais postecipadas é resultado da fórmula da soma de uma progressão geométrica (PG) com n termos e razão igual 1/(1+i)^n, ou seja, a equação acima pode ser resumida da seguinte maneira:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}$$

Em que A é o valor das prestações também chamadas de anuidades.

Para que a fórmula seja aplicada corretamente, deve existir correlação entre a frequência das prestações e a taxa efetiva utilizada, ou seja, se as prestações forem bimestrais, a taxa utilizada tem que ser a efetiva bimestral.

Enap

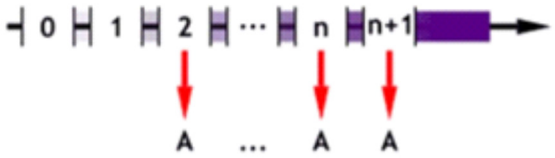
2.6 Valor Presente - Anuidades Adiantadas e Diferidas

A fórmula obtida no item anterior, para o caso de prestações vencidas, pode ser adaptada aos efeitos do cálculo do valor atual dos planos de prestações adiantadas ou diferidas.

Caso das prestações adiantadas - se as n anuidades são adiantadas, elas são distribuídas ao longo do tempo, como segue:

Tempo **0 1 2... (n-1)n**

Distribuição das prestações **A A A... A 0**



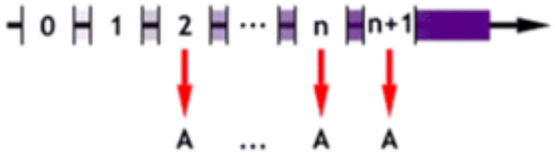
Ao usar a fórmula anterior sem nenhuma modificação, o valor resultante figura no momento correspondente a um período anterior da primeira cota, nesse caso, o momento t = -1. Observe que a primeira prestação já se encontra no período t = 0, logo, basta trazer as n-1 prestações futuras para o tempo t = 0. Olhando dessa maneira, temos uma prestação no valor de A em t = 0 e uma série com n-1 prestações começando em t=1, que é o mesmo caso do item anterior com n-1 prestações. Dessa forma tem-se:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}/(1+i)^{(q-1)}$$

Caso das prestações diferidas - como existem muitas variantes de plano de prestações diferidas, apresentamos o seguinte caso:

Tempo **0 1 2... n (n+1)**

Distribuição das prestações **0 0 A... A A**



Como podemos ver, a primeira cota é paga no final do segundo período. Isso implica que, ao usar a fórmula VP = {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]} para atualizar, o valor resultante fica expresso no momento t = 1. Nesse caso, para que esse valor fique no momento t = 0, é necessário atualizar um período o resultado obtido, descontando-se uma vez (t = 1) à taxa de juros. A nova fórmula para essa situação é VP= {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]}/(1+i)^1. No caso geral, onde a prestação é diferida e inicia-se no período q, a fórmula será:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}/(1+i)^{(q-1)}$$

Veja o Exemplo 10.

Calcule o valor atual de um conjunto de seis prestações semestrais, iguais e consecutivas de R$ 300,00 à taxa efetiva de 1% mensal.

Como as prestações são semestrais, é necessário calcular a taxa efetiva semestral equivalente à efetiva mensal de 1% a/m, ou seja, 6,152% ao semestre, que pode ser obtida calculando por meio da capitalização da taxa de 1% em seis meses = ((1,01^6)-1)*100).

Se as prestações são vencidas, o valor atual é calculado diretamente, usando a fórmula:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}$$

Em que: A = 300,00, i = 6,152% a.s.
e n = 6. => VP = R$ 1.468,18

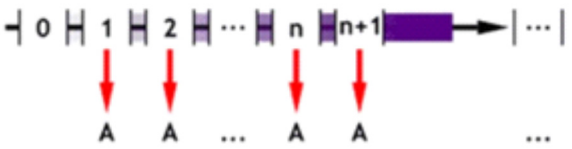
Se as prestações são adiantadas, o valor atual é: VP = A + {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n-1)]}, pois são apenas 5 prestações, uma vez que a primeira já se encontra no período t =0 ... => VP = 1558,50. Se a primeira cota semestral for paga ao final do décimo oitavo mês de concretizada a operação, o valor atual do plano é: VP = {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]}/(1+i)^(q-1), em que q = 3, pois, como o primeiro pagamento é no décimo oitavo mês, temos o primeiro pagamento no terceiro semestre, ou seja, q = 3. Assim, VP = 1.302,93.

2.7 Valor Presente - Perpetuidades

O esquema seguinte permite visualizar graficamente o fluxo de perpetuidades vencidas:

Tempo **0 1 2... n (n+1)**

Distribuição das prestações **0 0 A... A A**



Se, na fórmula de anuidades vencidas, consideramos que n tende ao infinito, a expressão resultante é o valor presente de um plano de perpetuidades vencidas: VP=A/i , que pode ser alcançada sempre considerando o conceito de que o valor presente (VP) é obtido pelo desconto do valor futuro (VF), que no caso é A, utilizando uma taxa de juros i.

A aplicação da fórmula é muito simples. Confira no **Exemplo numérico 11**.

Deseja-se calcular o valor presente de um plano de perpetuidades bimestrais vencidas, de R$ 25,00 iguais e consecutivas, quando a taxa efetiva mensal for de 1%.

Como a perpetuidade é bimestral, ao aplicar a fórmula de perpetuidade, deve-se usar a taxa efetiva bimestral equivalente à efetiva mensal de 1%, ou seja, 2,01% ab, relembrando sempre que a capitalização da taxa de juros de 1% em dois meses (=1,01^2) é igual a 1,0201, que,

após descontar a unidade e multiplicar por 100, chegamos a 2,01%. Logo, VP = A/i, em que A = R$25,00 e i = 2,01% ab => VP = R$1.243,78.

No caso do valor presente de um plano de perpetuidades adiantadas e diferidas, devemos modificar a fórmula de perpetuidade para poder aplicá-la. Para o caso de adiantadas, VP = A + A/i, e, para o caso diferida, VP = (A/i)/(1+i)^(q-1). Por exemplo, se as perpetuidades bimestrais do plano anterior forem adiantadas, o valor atual será igual a: VP = A + A/i, onde A = 25,00 e i = 2,01 ... => VP = 1.268,78.

Também pode-se corrigir para aplicá-la no caso de perpetuidades diferidas. Se a primeira das perpetuidades bimestrais de R$ 25,00 for paga no final do décimo mês, qual seria o VP? Nesse caso, o décimo mês é equivalente ao quinto bimestre, logo, q = 5. VP = (A/i)/ (1+i)^(q-1) = 1.148,61.

Conclui-se, portanto, que, em todo processo de análise de projetos e de decisões de investimentos, a matemática financeira possui um papel fundamental, pois, com a aplicação das técnicas certas, é possível avaliar com maior clareza e segurança os riscos inerentes a esses processos. Por isso é que se procurou estudar várias situações de investimentos e de avaliação de projetos, bem como conhecer as técnicas e a metodologia de cálculos de matemática financeira mais usada no mercado para essa finalidade.