Anexo II

Cálculo de Incerteza de Medição

Vamos conhecer, agora, um pouco mais sobre o cálculo da incerteza da medição. Além do que já estudou na aula Conceitos Técnicos da Metrologia, serão apresentadas outras formas para se estimar incertezas, o conceito de incerteza-padrão e exemplos do cálculo básico de incerteza. Vamos lá?

Outros conhecimentos necessários para o cálculo da incerteza

Para calcularmos a incerteza de medição, primeiramente devemos identificar suas fontes e estimar a incerteza de cada uma delas. Depois, as incertezas individuais devem ser combinadas, fornecendo-nos um único valor global. Existem regras para estimarmos a contribuição de cada incerteza e regras para combiná-las, conforme veremos a seguir.

1. As duas formas de estimar incertezas

Há duas abordagens na estimativa da incerteza de medição: tipo A e tipo B. Na maioria das situações, ambas são necessárias.

- ***Incerteza do tipo A*** – incerteza estimada a partir da distribuição estatística dos valores provenientes de repetidas medições.

- ***Incerteza do tipo B*** – incerteza estimada de outra forma que não a estatística. Pode ser baseada na experiência de experimentos passados em certificados de calibração, em especificações de fabricantes, em informações de publicações científicas, entre outros.

2. Incerteza-padrão

Todas as contribuições de incerteza devem ser expressas com a mesma probabilidade de abrangência. Para tal, necessitamos convertê-las em incertezas-padrão. A incerteza-padrão é

o intervalo cujo tamanho pode ser pensado como mais ou menos um desvio-padrão. Normalmente, a incerteza-padrão é representada pela letra u ou u(y) (incerteza-padrão para y).

2.1 Incerteza-padrão do Tipo A

Quando coletamos várias leituras repetidas, podemos calcular a média aritmética e o desvio-padrão do conjunto dado. De posse desses parâmetros, calculamos a incerteza-padrão u a partir da equação 1:

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Onde ***n*** é o número de leituras.

2.2 Incerteza-padrão do Tipo B

Quando a informação é mais escassa (em algumas estimativas do tipo B), provavelmente só seremos capazes de estimar os limites inferior e superior da incerteza. Teremos, então, que assumir que determinado valor tem a mesma probabilidade de estar em qualquer lugar entre os dois extremos, isto é, que ele pertence a uma distribuição retangular ou uniforme. A incerteza-padrão para uma distribuição retangular é calculada através da equação 2:

$$u_{retangular} = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Onde ***a*** é metade da largura do intervalo entre os limites inferior e superior.

Distribuições retangulares ou uniformes ocorrem muito comumente, mas não estamos impedidos de utilizar alguma outra distribuição, se tivermos um bom motivo para isso.

2.3 Conversão de unidades

As contribuições de incerteza devem ser expressas nas mesmas unidades antes de elas serem combinadas.

Se medirmos um comprimento, por exemplo, a incerteza da medição deve ser declarada em **unidades de comprimento**. Contudo, uma fonte de incerteza pode ser a variação da temperatura do ambiente. Embora a fonte dessa incerteza seja a temperatura, seu efeito se dará em termos de comprimento e, por isso, ela deve ser contabilizada em uma unidade de comprimento.

Como, ao ser medido, o objeto se expande 0,1% em comprimento por grau de aumento de temperatura, uma incerteza de temperatura de ± 2 °C refletiria em uma incerteza no comprimento de ± 0,2 cm, supondo um objeto de 100 cm de comprimento.

Uma vez que as incertezas-padrão estão em unidades compatíveis entre si, a incerteza combinada pode ser encontrada, como veremos a seguir.

2.4 Combinação de incertezas-padrão

Incertezas-padrão, sejam elas do tipo A ou do tipo B, podem ser combinadas através de soma quadrática. O resultado dessa soma quadrática é a incerteza-padrão combinada, uc ou uc (y).

2.4.1 – Soma quadrática para adição ou subtração

Devemos utilizar a soma quadrática quando o resultado que buscamos é obtido através da adição ou da subtração de uma série de valores medidos. Por exemplo, se quisermos saber qual é o comprimento de uma cerca constituída por ripas de madeira de diferentes larguras. Considerando que a incerteza-padrão (em metros) de cada ripa que constitui a cerca seja a, b, c, etc., então a incerteza-padrão combinada do comprimento da cerca será encontrada através da equação 3:

$$u_c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ...etc.} \qquad (3)$$

2.4.2 – Soma quadrática para multiplicação ou divisão

Nesse caso, é conveniente trabalharmos em termos de incertezas relativas ou fracionárias, para simplificação dos cálculos. Como exemplo, podemos citar o cálculo da área A de um tapete retangular, através da multiplicação das suas dimensões largura e comprimento. A incerteza relativa ou fracionária da área do tapete pode ser calculada a partir das incertezas fracionárias da largura e do comprimento. Para um comprimento L1 com uma incerteza u(L1), a incerteza relativa é u(L1)/L1. Para uma largura L2, a incerteza relativa é u(L2)/L2. Dessa forma, a incerteza relativa u(A)/A da área é dada pela equação 4:

$$\frac{u(A)}{A} = \sqrt{\left(\frac{u(L1)}{(L1)}\right)^2 + \left(\frac{u(L2)}{(L2)}\right)^2} \qquad (4)$$

Para um caso em que o resultado tenha que ser determinado multiplicando três fatores, a equação 5 teria três termos sendo somados dentro da raiz; se fossem quatro fatores para multiplicar, seriam quatro termos dentro da raiz, e assim sucessivamente. A equação 5 também pode ser utilizada, exatamente da mesma forma, para casos em que o resultado final da medição é um quociente de dois valores, ou seja, um número dividido pelo outro.

2.4.3 – Soma quadrática para outras operações

Quando tivermos que elevar ao quadrado (por exemplo, Z2) um valor para o cálculo do resultado final de uma medição, a incerteza relativa desse valor terá a seguinte forma:

$$\frac{2u(Z)}{Z} \qquad (5)$$

E quando uma raiz quadrada (por exemplo, √Z) fizer parte do cálculo de um resultado, então a incerteza relativa desse valor terá a seguinte forma:

$$\frac{u(Z)}{2Z} \qquad (6)$$

Obviamente, para chegar ao resultado que buscamos, muitas vezes temos que utilizar fórmulas que envolvem combinações de adição, subtração, multiplicação, divisão, etc. Um exemplo é o cálculo da potência elétrica P, que utiliza dados obtidos de medições da resistência elétrica R e da tensão V, conforme a equação 7:

$$P = \frac{V^2}{R} \qquad (7)$$

Nesse caso, a incerteza relativa u(P)/P é dada por:

$$\frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{2u(V)}{(V)}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{(R)}\right)^2} \qquad (8)$$

De forma geral, para cálculos em diversas etapas, o processo de combinação de incertezas-padrão de forma quadrática também pode ser realizado em várias etapas, aplicando-se as regras apresentadas para cada operação matemática. Entretanto, a combinação de incertezas-padrão para fórmulas mais complexas foge aos objetivos deste curso.

2.4.4 – Correlação

As equações que aprendemos para o cálculo da incerteza-padrão combinada apenas podem ser utilizadas se as incertezas-padrão de entrada não estiverem relacionadas entre si ou correlacionadas. Isso significa que é sempre importante nos perguntarmos se todas as contribuições da incerteza são independentes entre si.

Um grande erro em uma grandeza de entrada poderia causar um grande erro em outra?

Alguma influência externa, como a temperatura, poderia ter um efeito semelhante em vários componentes da incerteza de uma vez só?

Erros individuais frequentemente são independentes, mas, se eles não forem, cálculos adicionais, que não serão abordados neste curso, são necessários.

2.5 Incerteza expandida

Como vimos, a probabilidade de abrangência para a incerteza-padrão combinada é de um desvio-padrão. Contudo, pode ser que queiramos ou que necessitemos declarar a incerteza para outra probabilidade de abrangência. Essa mudança de intervalo de abrangência pode ser feita utilizando o fator de abrangência k. Multiplicar a incerteza-padrão combinada uc por um fator de abrangência k resulta no que chamamos de incerteza expandida U, isto é:

$$u = k.u_c \qquad (9)$$

Normalmente, a incerteza expandida é calculada para k = 2, o que significa uma probabilidade de abrangência de 95,4 % (considerando que a incerteza-padrão combinada siga uma distribuição normal de probabilidade). Se k = 3, considerando uma distribuição normal, a probabilidade de abrangência é de 99,7 %.

Outras distribuições de probabilidade, menos comuns, apresentarão diferentes fatores de abrangência.

É importante observar que, sempre que soubermos o valor de uma incerteza expandida e do seu fator de abrangência, podemos encontrar o valor da incerteza-padrão combinada aplicando a equação 9, dividindo a incerteza expandida pelo fator de abrangência.

2.6 Expressão da resposta final

É importante expressar a resposta final de forma que o interessado possa efetivamente utilizar as informações. As principais informações a declarar são:

I. **O resultado da medição e sua incerteza**. Por exemplo: *O comprimento da barra é 20 cm ± 1 cm.*

II. **O fator de abrangência e a probabilidade de abrangência**. Por exemplo: *A incerteza declarada baseia-se em uma incerteza-padrão, multiplicada pelo fator de abrangência k = 2, para uma probabilidade de abrangência de aproximadamente 95%.*

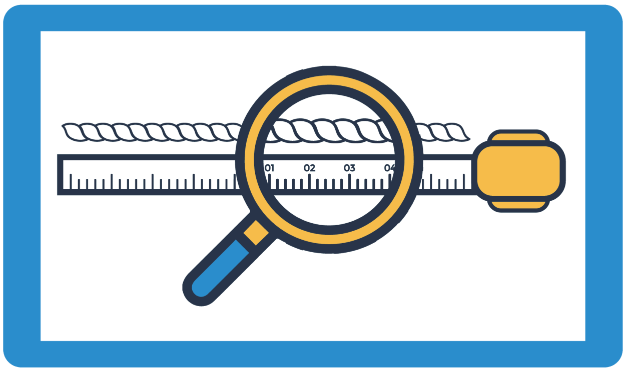
III. **Como a incerteza foi estimada**. Por exemplo: *podemos fazer referência a uma publicação na qual o método esteja descrito.*

3. Cálculo Básico da Incerteza

A seguir, será apresentado um exemplo de cálculo de incerteza. Ele não é 100% realista, pois o objetivo é que seja simples e claro o suficiente para ilustrar o método.

3.1 A medição: qual o comprimento da corda?

Figura 1 – Medindo o comprimento de uma corda



Fonte: Inmetro

Passo 1: Temos que decidir quais medições e cálculos são necessários para produzir o resultado final. Efetuaremos a medição do comprimento utilizando uma trena. Além do comprimento medido com a trena, é possível que tenhamos que considerar:

a) Possíveis erros devido à trena:

- Ela necessita alguma correção? Qual é a incerteza da calibração?
- Ela pode deformar-se?
- O uso da trena pode tê-la encurtado? Quanto deve ter mudado o seu comprimento desde a última calibração?
- Qual é a sua resolução?

b) Possíveis erros devido à corda:

- A corda permanece reta? Ela está muito ou pouco esticada?
- A temperatura e/ou umidade (ou qualquer outra variável) influencia/influenciam no comprimento?
- As pontas da corda são bem definidas ou esfiapadas?

c) Possíveis erros devido tanto ao processo de medição quanto à pessoa que faz a medição:

- Quão bem é possível alinhar a ponta da corda com a ponta da trena?
- É possível alinhar bem paralelamente a trena com a corda?
- A medição é repetitiva?

Passo 2: Medimos a corda dez vezes e anotamos todos os valores de comprimento obtidos. Vamos supor que a média aritmética e o desvio-padrão das dez medidas sejam, respectivamente, 5,017 m e 0,0021 m (2,1 mm). Também é importante que registremos:

- Quando as medidas foram realizadas?
- Como as medidas foram realizadas? Por exemplo, se foram efetuadas horizontal ou verticalmente, detalhes de como realizamos o alinhamento da trena e da corda, etc.
- Qual trena foi utilizada?
- Condições ambientais (se acharmos que elas podem afetar os resultados).
- Qualquer outra informação que julguemos relevante.

Passo 3: Devemos olhar para todas as fontes de incerteza possíveis e estimar o valor de cada uma delas. Supomos que, nesse caso:

I. A trena foi calibrada e não necessita de nenhuma correção. A incerteza declarada no seu certificado de calibração é 0,1% do valor lido, considerando um fator de abrangência k = 2 (para uma distribuição normal). Nesse caso, 0,1 % de 5,017 m é próximo a 5 mm. Dividindo por 2, temos que a incerteza-padrão (para k = 1) é u = 2,5 mm.

II. A divisão da trena é 1 mm, o que faz com que possamos esperar, na leitura, um erro não superior a ± 0,5 mm. Além disso, podemos considerar uma incerteza uniformemente distribuída (os valores medidos podem estar em qualquer lugar dentro de um intervalo de 1 mm). Para encontrar a incerteza-padrão, dividimos metade da divisão por 2, o que resulta em, aproximadamente, u = 0,3 mm.

III. A trena permanece bem reta, esticada, mas vamos supor que a corda inevitavelmente apresente algumas pequenas irregularidades, não podendo ficar bem esticada. Dessa forma, a medição provavelmente vai subestimar o comprimento real da corda. Vamos "chutar" que o valor medido seja então cerca de 0,2% menor do que o real e que a incerteza de fazer esse "chute" também seja, no máximo, 0,2%.

Isso significa que podemos corrigir o resultado somando 0,2% (cerca de 10 mm). Como não temos informações, podemos assumir que a incerteza seja distribuída uniformemente. Dividindo metade do intervalo da incerteza (10 mm) por 2, teremos uma incerteza-padrão u = 5,8 mm.

As estimativas de incerteza, que vimos até agora, são todas do tipo B. A seguir, veremos uma estimativa do tipo A.

IV. O desvio-padrão nos informa sobre a repetitividade da medição em si. Vamos supor que, através da equação 1, encontramos s = 2,1 mm. Dessa forma, calculamos a incerteza como segue:

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2,1}{\sqrt{10}} = 0,7mm$$

Consideraremos que nenhuma outra incerteza necessita ser contabilizada nesse exemplo.

Passo 4: Decidimos se as fontes de incerteza listadas são independentes entre si. Para esse exemplo, vamos dizer que elas são todas independentes. Caso elas não fossem, é importante lembrar que cálculos adicionais seriam necessários.

Passo 5: Calculamos o resultado da nossa medição, incluindo as correções conhecidas. Nesse caso, o resultado é obtido da média das leituras e da correção para o fato de a corda não permanecer bem reta, esticada, durante a medição, ou seja:

$$5,017m + 0,010m = 5,027m$$

Passo 6: Vamos calcular a incerteza-padrão combinada. Como o único cálculo necessário para encontrarmos o resultado foi a adição de uma correção, então devemos utilizar a equação 4 para encontrar o que procuramos:

$$u_c = \sqrt{2,5^2 + 0,3^2 + 5,8^2 + 0,7^2 = 6,4mm}$$

Passo 7: Agora podemos calcular a incerteza expandida. Para um fator de abrangência k = 2, basta multiplicar o valor da incerteza-padrão combinada (calculada no passo 6) por 2, em conformidade com a equação 10, para uma probabilidade de abrangência de 95%:

$$U = 2x6,4 = 12,8mm = 0,0128m$$

Passo 8: Veremos agora o resultado da medição, a incerteza e a forma como ambos foram encontrados:

O comprimento da corda é 5,027 m ± 0,013 m. A incerteza expandida foi calculada multiplicando a incerteza-padrão combinada pelo fator de abrangência k = 2, para uma probabilidade de abrangência de aproximadamente 95%.

A incerteza foi estimada de acordo com o método da aula sobre incerteza de medição.

3.2 Análise da Incerteza – Tabela

Com o objetivo de ajudar no processo de cálculo, resumiremos a análise de incerteza em uma tabela, como será mostrado a seguir.

Tabela 1 – Análise da incerteza

Fonte de incerteza	Valor (±)	Distribuição de probabilidade	Divisor	Incerteza-padrão
Incerteza padrão	5,0 mm	Normal	2	2,5 mm
Resolução padrão	0,5 mm	Retangular	√3	0,3 mm
Corda não permanece perfeitamente reta	10,0 mm	Retangular	√3	5,8 mm
Incerteza-padrão das dez medidas	0,7 mm	Normal	1	0,7 mm
Incerteza-padrão combinada		Assumida Normal		6,4 mm
Incerteza expandida		Assumida Normal		12,8 mm