Introdução ao Software R e à Análise Econométrica

Agosto de 2018

Alexandre Xavier Ywata Carvalho
Geraldo Sandoval Góes

Introdução à Regressão Linear com Dados de Painel

Regressão com Dados de Painel

- Considere o modelo de regressão tradicional:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

- Nesse modelo, em geral, esse tipo de modelo se aplica a situações nas quais temos dados do tipo *cross-section*, ou dados de séries temporais

- Com o avanço nos métodos de coleta e armazenamento de informações, cada vez mais estão disponíveis bases de dados de painel

    - Para cada unidade observacional, temos observações para diferentes unidades de tempo

- A possibilidade de observar os dados em diferentes instantes do tempo fornece a possibilidade de diferentes tipo de análise

- A técnicas para tratamento e análise de dados de painel estão amplamente disponíveis

- No R, vamos utilizar nos exemplos bases de dados disponibilizadas pelos próprios pacotes. O principal pacote para dados de painel é o “plm”

- Painel pode ser: **balanceado** (mesmo número de períodos para cada unidade observacional) ou **não-balanceado**

Regressão com Dados de Painel

- Como exemplo, vamos carregar quatro tabelas de dados:

```
#---- carregando os dados

data("EmplUK", package = "plm")
data("Wages", package = "plm")
data("Grunfeld", package = "plm")
data("Produc", package = "plm")

#--- descrição dos dados

?EmplUK
?Wages
?Grunfeld
?Produc

#---- sumário dos dados

summary(EmplUK)
summary(Wages)
summary(Produc)
summary(Grunfeld)
```

	firm	year	sector	emp	wage	capital	output
1	1	1977	7	5.041000	13.1516	0.5894	95.7072
2	1	1978	7	5.600000	12.3018	0.6318	97.3569
3	1	1979	7	5.015000	12.8395	0.6771	99.6083
4	1	1980	7	4.715000	13.8039	0.6171	100.5501
5	1	1981	7	4.093000	14.2897	0.5076	99.5581
6	1	1982	7	3.166000	14.8681	0.4229	98.6151
7	1	1983	7	2.936000	13.7784	0.3920	100.0301
8	2	1977	7	71.319000	14.7909	16.9363	95.7072
9	2	1978	7	70.642998	14.1036	17.2422	97.3569
10	2	1979	7	70.917999	14.9534	17.5413	99.6083
11	2	1980	7	72.030998	15.4910	17.6574	100.5501
12	2	1981	7	73.689003	16.1969	16.7133	99.5581

An ***unbalanced*** panel of 140 observations from 1976 to 1984
total number of observations : 1031
observation : firms, country : United Kingdom

Firm - firm index
Year - year
Sector - the sector of activity
Emp - employment
Wage - wages
Capital - capital
Output - output

Regressão com Dados de Painel

- A fórmulas para regressão com dados de painel são bastante flexíveis, permitindo a inclusão de lags (defasagens), leads (valores futuros) e diferenças (valor de uma variável menos um valor no período anterior)
- lag(log(emp), 1) indica o valor defasado (no período anterior) do logaritmo natural da variável "emp"
- lag(log(wage), 3) indica o valor defasado de três períodos anteriores, do logaritmo natural da variável "wage"
- diff(log(capital), 2) indica o valor de log(capital) – o valor de log(capital) dois períodos anteriores

```
#---- exemplo de regressão com dados de painel (fórmulas gerando o mesmo resultado)


formula1 <- log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2) + lag(log(wage), 3) +
                  diff(log(capital), 2) + diff(log(capital), 3)
Emp.mod1 <- plm(formul = formula1, data = EmplUK, model = "within")
summary(Emp.mod1)


formula2 <- log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2) + lag(log(wage), 3) +
                    I(log(capital) - lag(log(capital), 2)) + I(log(capital) - lag(log(capital), 3))
Emp.mod2 <- plm(formul = formula2, data = EmplUK, model = "within")
summary(Emp.mod2)
```

Regressão com Dados de Painel

- Em geral, reescrevemos a equação linear para dados de painel, indexando as unidades observacionais *i* (*i* = 1, ... , *n*) e os períodos de tempo *t* (*t* = 1, ... , *T*)

$$y_{i,t} = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- Vamos assumir, por enquanto, que o erro $\epsilon_{i,t}$ possui distribuição normal, com média zero, e variância σ_ϵ^2
- Além disso, vamos assumir por enquanto que $\epsilon_{i,t}$ são erros não correlacionados entre si
- O elemento $y_{i,t}$ corresponde ao valor da variável resposta da unidade *i*, no período *t*
- O item $x_{k,i,t}$ corresponde à *k*-ésima variável explicativa, para a unidade *i*, no período *t*
- Na versão da equação acima, os dados para cada unidade observacional estão "empilhados"
- Podemos estimar os parâmetros desconhecidos $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ utilizando um estimador de mínimos quadrados ordinários para os dados empilhados
- A estimação usando os dados empilhados e aplicando um estimador de MQO é conhecida como estimação ou regressão do tipo **"pooled"**

Regressão com Dados de Painel

- Exemplo:

```
Emp.pooled1 <- plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "pooling")
summary(Emp.pooled1)
```

- Output:

```
> summary(Emp.pooled1)
Pooling Model


Call:
plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "pooling")


Unbalanced Panel: n=140, T=4-6, N=611


Residuals :
    Min.  1st Qu.   Median  3rd Qu.     Max.
-0.72500 -0.05210  0.00401  0.05520  0.91900
```

Regressão com Dados de Painel

- Exemplo (continuação):

Coefficients :

	Estimate	Std. Error	t-value	Pr(>|t|)	
(Intercept)	0.0609696	0.0599305	1.0173	0.3094	
lag(log(emp), 1)	0.9545302	0.0426280	22.3921	< 2.2e-16	***
lag(log(emp), 2)	0.0337330	0.0424782	0.7941	0.4274	
lag(log(wage), 2)	-0.0037779	0.0656215	-0.0576	0.9541	
lag(log(wage), 3)	-0.0234908	0.0623861	-0.3765	0.7066	
diff(log(capital), 2)	0.3174782	0.0409002	7.7623	3.581e-14	***
diff(log(capital), 3)	-0.0111866	0.0325766	-0.3434	0.7314	

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Total Sum of Squares: 1099.2
Residual Sum of Squares: 9.1562
R-Squared: 0.99167
Adj. R-Squared: 0.99159
F-statistic: 11984.9 on 6 and 604 DF, p-value: < 2.22e-16

Regressão com Dados de Painel

- Exercício prático. Na regressão abaixo,
  - Adicione um lag de ordem 3 para o nível de emprego (emp), e um lag de ordem 1 para a variável de salários (wage)
  - Rode um modelo de painel com estimador do tipo “pooled”
  - Verifique as variáveis lag adicionadas são estatisticamente significantes.

```
formula1 <- log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2)
                       + lag(log(wage), 3) + diff(log(capital), 2) + diff(log(capital), 3)


Emp.pooled1 <- plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "pooling")
summary(Emp.pooled1)
```

Regressão com Dados de Painel

- O problema com regressão do tipo pooled é que perdermos a oportunidade de tentar identificar diferenças intrínsecas entre as unidades observacionais

- Essas diferenças não necessariamente estão contabilizadas nas variáveis explicativas $x_{1,i,t}$, $x_{2,i,t}$, ... , $x_{k,i,t}$ (variáveis observáveis)

- Para contornar isso, nós trabalhamos então com a inclusão de variáveis dummy específicas para cada unidade observacional

- Por exemplo, em um painel de municípios, observados em diferentes anos, nós estamos tentando identificar os efeitos específicos das características de cada município individualmente

- Nesse caso, a regressão para dados de painel é reescrita na forma:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ ... + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- O parâmetro α_i corresponde a o efeito idiossincrático para a unidade observacional *i*

    - A ideia é que o termo contabilize por características da unidade *i* (municípios, por exemplo), que não se alteram ao longo dos anos, e que não sejam contabilizadam pelas variáveis observáveis $x_{1,i,t}$, $x_{2,i,t}$, ... , $x_{k,i,t}$

Resultado dos efeitos do FNE sobre o crescimento médio anual do PIB *per capita* no nível municipal – método painel de efeitos fixos

	Variável dependente = taxa de crescimento anual média do PIB *per capita*				
Método de estimação	Painel efeitos fixos	Painel efeitos fixos		Painel efeitos fixos	Painel efeitos fixos
	(1)	(2)		(3)	(4)
Alta renda_Proporção do FNE início do período (1º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.9982**	0.8501**	Alta renda_Proporção do FNE início do período (1º + 2º ano) em relação ao PIB do início de cada período	-0.0122	-0.0380*
	(0.0157)	(0.0208)		(0.5977)	(0.0665)
Dinâmica_Proporção do FNE início do período (1º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.1407***	0.1225***	Dinâmica_Proporção do FNE início do período (1º + 2º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.1282***	0.1066***
	(0.0006)	(0.0010)		(0.0000)	(0.0000)
Baixa renda_Proporção do FNE início do período (1º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.4528***	0.2129***	Baixa renda_Proporção do FNE início do período (1º + 2º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.0934***	0.0273
	(0.0000)	(0.001)		(0.0002)	(0.2259)
Estagnada_Proporção do FNE início do período (1º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.1508**	-0.0191	Estagnada_Proporção do FNE início do período (1º + 2º ano) em relação ao PIB do início de cada período	0.1322***	0.0639***
	(0.0411)	0.7733		(0.0000)	(0.0099)
Ln (PIB per capita no início de cada período)	-0.1693***	-0.2944***	Ln (PIB *per capita* no início de cada período)	-0.1681***	-0.2936***
	(0.0000)	(0.0000)		(0.0000)	(0.0000)
Ln (anos médios de escolaridade no início de cada período, Rais)	0.0670***	-0.0103**	Ln (anos médios de escolaridade no início de cada período, Rais)	0.0653***	-0.01090***
	(0.0000)	(0.0138)		(0.0000)	(0.0091)
Ln (densidade populacional no início de cada período)	0.0926***	-0.1280***	Ln (densidade populacional no início de cada período)	0.0886***	-0.1280***
	(0.0000)	(0.0000)		(0.0000)	(0.0000)
Efeitos fixos	Sim	Sim	Efeitos fixos	Sim	Sim
Dummy de tempo	Não	Sim	*Dummy* de tempo	Não	Sim
Número de observações (municípios)	5.946	5.946		5.946	5.946
R2 ajustado	0.1739	0.3368		0.1779	0.3403

Regressão com Dados de Painel

- Além dos efeitos individuais de cada unidade observacional, podemos também incluir efeitos específicos δ_t dos períodos de tempo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \delta_t + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ ... + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- Quando o número de unidades observacionais *n* não é muito grande, podemos estimar os efeitos α_i simplesmente adicionando dummies à regressão, da mesma forma que fizemos nas aulas anteriores

- No entanto, em geral, o número *n* é da ordem de milhares (exemplo, *n* = 5564 municípios), e teríamos que incluir 5564 dummies (ou 5563) na regressão

- Em estudos longitudinais de trabalhadores, por exemplo, o valor *n* pode chegar a dezenas ou centenas de milhares

- Computacionalmente, temos então um problema prático de estimar os coeficientes α_i, quando *n* é alto

- Uma parcela considerável dos avanços na análise de regressão com dados de painel corresponde justamente a técnicas para estimarmos os coeficientes α_i

- Iremos agora discutir uma boa parte desses procedimentos

Regressão com Dados de Painel

- Vamos considerar o caso mais geral, conforme regressão abaixo (os efeitos fixos de período δ_t podem estar representados por algumas das variáveis explicativas):

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ ... + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- As variáveis explicativas podem conter também defasagens, diferenças, vários tipos de variáveis dummy, etc.

- A literatura divide a estimação dos coeficientes α_i, de acordo com duas situações:

  - **Estimadores de efeitos aleatórios** para α_i - nesse caso, assume-se que os coeficientes α_i são termos aleatórios, com variância σ_α^2, e esses termos não são correlacionados com os erros $\epsilon_{i,t}$

  - **Estimadores de efeitos fixos** para α_i - utilizamos esses estimadores quando a hipótese de que os coeficientes α_i são não correlacionados com os erros $\epsilon_{i,t}$ não é uma hipótese válida

- Dentro de cada um desses dois grandes grupos de estimadores, há uma série de variações

- Na prática, os estimadores de efeitos fixos são mais comuns, por conta da tendência de rejeitarmos a hipótese nula de que os coeficientes α_i são não correlacionados com os erros $\epsilon_{i,t}$

Estimadores de Efeitos Fixos

- No caso dos estimadores de efeitos fixos, temos então que estimar diretamente os coeficientes α_i na equação abaixo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t} \qquad \text{(A)}$$

- Para isso, vamos inicialmente aplicar a soma para todas as observações em cada unidade *i*, e dividir por *n*

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{T} y_{i,t} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}\right]$$

$$\bar{y}_{i,.} = \alpha_i + \beta_1 \bar{x}_{1,i,.} + \beta_2 \bar{x}_{2,i,.} + \ \ldots \ + \beta_k \bar{x}_{k,i,.} + \bar{\epsilon}_{i,.} \qquad \text{(B)}$$

- Subtraindo (A) – (B), obtemos a equação:

$$(y_{i,t} - \bar{y}_{i,.}) = \beta_1 (x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - \bar{x}_{k,i,.}) + (\epsilon_{i,t} - \bar{\epsilon}_{i,.})$$

- Ou alternativamente

$$(y_{i,t} - \bar{y}_{i,.}) = \beta_1 (x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - \bar{x}_{k,i,.}) + \epsilon^*_{i,t} \qquad \text{(C)}$$

- Com $\epsilon^*_{i,t} = (\epsilon_{i,t} - \bar{\epsilon}_{i,.})$

Estimadores de Efeitos Fixos

- Considere então a fórmula

$$(y_{i,t} - \bar{y}_{i,.}) = \beta_1 (x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - \bar{x}_{k,i,.}) + \epsilon^*_{i,t}$$

- Podemos estimar os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_k$ através da regressão da variável $(y_{i,t} - \bar{y}_{i,.})$, versus as variáveis explicativas $(x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.})$, $(x_{2,i,t} - \bar{x}_{2,i,.})$, ... , $(x_{k,i,t} - \bar{x}_{k,i,.})$

- Um cuidado adicional dever tomado para o fato de o erro $\epsilon^*_{i,t} = (\epsilon_{i,t} - \bar{\epsilon}_{i,.})$ não ser mais não-correlacionado. Devido ao termo $\bar{\epsilon}_{i,.}$, aparecendo em todos os períodos para cada unidade *i*, o termo $\epsilon^*_{i,t}$ apresenta uma correlação com $\epsilon^*_{i,s}$, com $t \neq s$

- Vamos nos preocupado com os resíduos correlacionados mais adiante

- Um primeiro fato importante da equação na fórmula (C) é que, no estimador de efeitos fixos, não podemos incluir entre as variáveis explicativas uma variável que seja constante para todos os períodos de tempo, para todos as unidades *i*

- De fato, se tivermos $x_{1,i,t} = x_{1,i}$, para toda unidade *i*, então $\bar{x}_{1,i,.} = x_{1,i}$; portanto, $(x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.}) = x_{1,i} - x_{1,i} = 0$, para toda unidade *i*. Na nossa matriz *X* de variáveis explicativas vamos ter uma coluna somente com zeros, e não será possível estimar os coeficientes da regressão

- Portanto, quando estivermos usando estimadores de efeitos fixos, NÃO podemos incluir variáveis explicativas que não variem no tempo, para pelo menos algumas das unidades *i*

Estimadores de Efeitos Fixos

- Considere novamente a equação com os efeitos fixos α_i:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ ... + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- Em princípio, o efeito fixo α_i serve justamente para capturar, em um único coeficiente, todas as especificidades da unidade (por exemplo, município) *i*
- Se uma determinada variável $x_{1,i,t}$ é constante ao longo de todos os períodos, não precisamos incluída na regressão. O seu efeito em princípio está sendo capturado pela constante α_i
- Considere então uma regressão na qual as unidades observacionais *i* sejam municípios brasileiros, e os períodos *t* sejam anos consecutivos
  - Nesse caso, é tentador incluir na regressão, variáveis explicativas com base no Censo 2010, e repetir esses valores para os demais anos
  - O problema dessa estratégia é justamente o fato de que, quando repetimos os valores do Censo 2010 para os demais anos, as variáveis resultantes não variam ao longo dos períodos
  - Portanto, não podemos utilizar estimadores de efeitos fixos nesses casos
  - Alternativas: usar fontes de dados que possuem informações anuais: Censo Escolar, DataSus, transferências de renda, RAIS etc.

Estimadores de Efeitos Fixos

- O estimador de efeitos fixos baseado na fórmula abaixo é conhecido como estimador **"within"** ou estimador **"demeaned"**

$$(y_{i,t} - \bar{y}_{i,.}) = \beta_1 (x_{1,i,t} - \bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - \bar{x}_{k,i,.}) + \epsilon^*_{i,t} \qquad \text{(C)}$$

- Esse é um estimador muito utilizado na prática

- Com base nas estimativas $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ para os parâmetros $\beta_1, \ldots, \beta_k$, podemos empregar a equação (B), para encontrar estimativas para os efeitos fixos α_i

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i,.} - \left[\beta_1 \bar{x}_{1,i,.} + \beta_2 \bar{x}_{2,i,.} + \ \ldots \ + \beta_k \bar{x}_{k,i,.}\right]$$

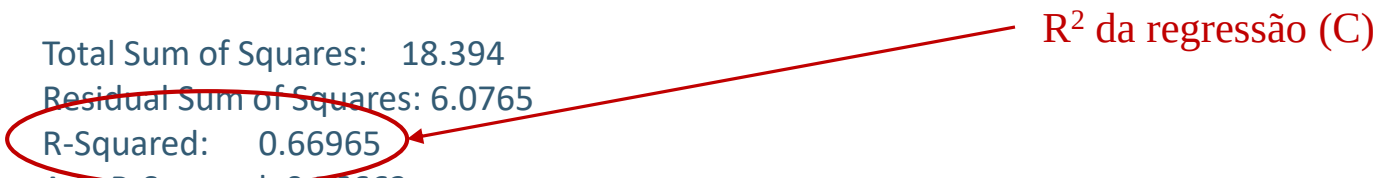
- Em muitos casos, é útil analisar esses efeitos fixos, utilizando, por exemplo, análises gráficas

Estimadores de Efeitos Fixos

- Abaixo sintaxe em R para estimar uma regressão de painel com efeitos fixos, via estimador within

```
#---- regressão com estimador de efeitos fixos, do tipo within


Emp.within1 <- plm(formul = formula1, data = EmplUK, model = "within")
summary(Emp.within1)


fixef(Emp.within1) #--- extraindo os efeitos fixos de cada unidade


#---- incluindo efeitos dos períodos


Emp.within1 <- plm(log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2) + lag(log(wage), 3) +
                   diff(log(capital), 2) + diff(log(capital), 3) + as.factor(year), data = EmplUK, model = "within")
summary(Emp.within1)
```

```
Oneway (individual) effect Within Model

Call:
plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "within")

Unbalanced Panel: n=140, T=4-6, N=611

Residuals :
   Min. 1st Qu.  Median 3rd Qu.    Max.
-0.5870 -0.0462  0.0035  0.0463  0.8170

Coefficients :
                    Estimate Std. Error t-value  Pr(>|t|)
lag(log(emp), 1)      0.661436   0.045003 14.6977 < 2.2e-16 ***
lag(log(emp), 2)      0.014835   0.054911  0.2702 0.7871501
lag(log(wage), 2)    -0.024417   0.084921 -0.2875 0.7738394
lag(log(wage), 3)     0.092591   0.080758  1.1465 0.2521638
diff(log(capital), 2) 0.192682   0.041313  4.6640 4.059e-06 ***
diff(log(capital), 3) 0.124067   0.036670  3.3833 0.0007767 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Total Sum of Squares:    18.394
Residual Sum of Squares: 6.0765
R-Squared:      0.66965
Adj. R-Squared: 0.56663
F-statistic: 157.097 on 6 and 465 DF, p-value: < 2.22e-16
```



Regressão com Dados de Painel

- Exercício prático. Na regressão abaixo,
  - Adicione um lag de ordem 3 para o nível de emprego (emp), e um lag de ordem 1 para a variável de salários (wage)
  - Rode um modelo de painel com estimador do tipo “within”
  - Verifique as variáveis lag adicionadas são estatisticamente significantes.

```
formula1 <- log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2)
                       + lag(log(wage), 3) + diff(log(capital), 2) + diff(log(capital), 3)
```

Estimadores de Efeitos Fixos

- Considere novamente o problema de estimar os coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ na equação abaixo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t} \qquad (A)$$

- Considere a primeira defasagem da equação (A) acima

$$y_{i,t-1} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t-1} + \beta_2 x_{2,i,t-1} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t-1} + \epsilon_{i,t-1} \qquad (A1)$$

- Subtraindo (A) – (A1), obtemos a equação:

$$(y_{i,t} - y_{i,t-1}) = (\alpha_i - \alpha_i) + \beta_1 (x_{1,i,t} - x_{1,i,t-1}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - x_{k,i,t-1}) + (\epsilon_{i,t} - \epsilon_{i,t-1})$$

- Resultando:

$$(y_{i,t} - y_{i,t-1}) = \beta_1 (x_{1,i,t} - x_{1,i,t-1}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - x_{k,i,t-1}) + \tilde{\epsilon}_{i,t}$$

- Com o novo termo de erro $\epsilon^*_{i,t} = (\epsilon_{i,t} - \epsilon_{i,t-1})$. Esse termo também apresenta correlação, mas nós não iremos detalhar isso agora

- Note que a regressão acima está em primeiras diferenças tanto para as variáveis explicativas como para a variável resposta

$$\Delta y_{i,t} = \beta_1 \Delta x_{1,i,t} + \beta_2 \Delta x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k \Delta x_{k,i,t} + \tilde{\epsilon}_{i,t} \qquad (D)$$

Estimadores de Efeitos Fixos

- O estimador com base na regressão abaixo é conhecido como estimador de efeitos fixos, do tipo **primeiras diferenças ("first differences")**

$$\Delta y_{i,t} = \beta_1 \Delta x_{1,i,t} + \beta_2 \Delta x_{2,i,t} + \ ... + \beta_k \Delta x_{k,i,t} + \tilde{\epsilon}_{i,t} \qquad \text{(D)}$$

- Diferentemente do estimador do tipo "within", no caso do estimador de primeiras diferenças não é possível obter os coeficientes $\hat{\alpha}_i$

- Abaixo a sintaxe para estimar no R

```
#---- regressão com estimador de efeitos fixos, do tipo first diferences

Emp.fd1 <- plm(formul = formula1, data = EmplUK, model = "fd")
summary(Emp.fd1)

fixef(Emp.fd1) #--- extraindo os efeitos fixos de cada unidade (vai dar erro!)
```

```
Oneway (individual) effect First-Difference Model

Call:
plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "fd")

Unbalanced Panel: n=140, T=4-6, N=611
Observations used in estimation: 471

Residuals :
    Min.  1st Qu.   Median  3rd Qu.     Max.
-0.92100 -0.05530  0.00815  0.05450  0.91800

Coefficients :
                    Estimate Std. Error t-value  Pr(>|t|)
(intercept)         -0.0475518  0.0081571 -5.8295 1.042e-08 ***
lag(log(emp), 1)     0.1329223  0.0449745  2.9555  0.003280 **
lag(log(emp), 2)     0.1117792  0.0572729  1.9517  0.051576 .
lag(log(wage), 2)    0.0606044  0.0884320  0.6853  0.493483
lag(log(wage), 3)   -0.0676549  0.0861997 -0.7849  0.432935
diff(log(capital), 2)  0.1158038  0.0364845  3.1741  0.001603 **
diff(log(capital), 3)  0.1714872  0.0370334  4.6306 4.740e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Total Sum of Squares:    10.637
Residual Sum of Squares: 9.0427
R-Squared:      0.14991
Adj. R-Squared: 0.13892
F-statistic: 13.6375 on 6 and 464 DF, p-value: 2.7803e-14
```

Número de observações utilizadas

R^2 da regressão (D)

Regressão com Dados de Painel

- Exercício prático. Na regressão abaixo,
  - Adicione um lag de ordem 3 para o nível de emprego (emp), e um lag de ordem 1 para a variável de salários (wage)
  - Rode um modelo de painel com estimador do tipo “first differences”
  - Verifique as variáveis lag adicionadas são estatisticamente significantes.

```
formula1 <- log(emp) ~ lag(log(emp), 1) + lag(log(emp), 2) + lag(log(wage), 2)
                       + lag(log(wage), 3) + diff(log(capital), 2) + diff(log(capital), 3)
```

Estimadores de Efeitos Fixos

- Voltemos novamente ao problema de estimar os coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ na equação abaixo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t} \qquad \text{(A)}$$

- Vamos agora derivar o terceiro tipo de estimador de efeitos fixos, conhecido como estimador **"between"**

- Para isso, lembrando a equação (B) acima:

$$\bar{y}_{i,.} = \alpha_i + \beta_1 \bar{x}_{1,i,.} + \beta_2 \bar{x}_{2,i,.} + \ \ldots + \beta_k \bar{x}_{k,i,.} + \bar{\epsilon}_{i,.} \qquad \text{(B)}$$

- Podemos reagrupar os termos, inserindo um intercepto α, obtendo

$$\bar{y}_{i,.} = \alpha + \beta_1 \bar{x}_{1,i,.} + \beta_2 \bar{x}_{2,i,.} + \ \ldots + \beta_k \bar{x}_{k,i,.} + [\alpha_i - \alpha + \bar{\epsilon}_{i,.}]$$

- Ou, reescrevendo,

$$\bar{y}_{i,.} = \alpha + \beta_1 \bar{x}_{1,i,.} + \beta_2 \bar{x}_{2,i,.} + \ \ldots + \beta_k \bar{x}_{k,i,.} + \bar{\epsilon}^*_{i,.} \qquad \text{(B1)}$$

- Onde $\bar{\epsilon}^*_{i,.} = [\alpha_i - \alpha + \bar{\epsilon}_{i,.}]$ é um termo de erro nessa nova equação. Esse termo também é correlacionado entre si, mas pode ser ajustado devidamente na estimação

- O estimador **"between"** corresponde simplesmente a uma regressão *cross-section* das médias da variável predita versus as médias das variáveis explicativas

Estimadores de Efeitos Fixos

- O estimador **"between"** corresponde simplesmente a uma regressão *cross-section* das médias da variável predita versus as médias das variáveis explicativas
- Da mesma forma que no estimador de primeiras diferenças, não é possível obter diretamente estimativas para os efeitos fixos α_i
- O estimador do tipo **"between"** não apresenta vantagens em relação aos demais estimadores
- Sintaxe no R:

```
#---- regressão com estimador de efeitos fixos, do tipo between

Emp.between1 <- plm(formul = formula1, data = EmplUK, model = "between")
summary(Emp.between1)

fixef(Emp.between1) #--- extraindo os efeitos fixos de cada unidade (vai dar erro!)
```

```
Oneway (individual) effect Between Model

Call:
plm(formula = formula1, data = EmplUK, model = "between")

Unbalanced Panel: n=140, T=4-6, N=611
Observations used in estimation: 140

Residuals :
    Min.   1st Qu.    Median   3rd Qu.      Max.
-0.080100 -0.011600  0.000133  0.013700  0.072600

Coefficients :
                  Estimate Std. Error  t-value  Pr(>|t|)
(Intercept)         0.066345   0.029245   2.2686    0.0249 *
lag(log(emp), 1)    1.931319   0.044720  43.1867 < 2.2e-16 ***
lag(log(emp), 2)   -0.937184   0.044536 -21.0431 < 2.2e-16 ***
lag(log(wage), 2)  -0.061661   0.070879  -0.8699    0.3859
lag(log(wage), 3)   0.042590   0.067088   0.6348    0.5266
diff(log(capital), 2)  0.506499   0.058375   8.6767 1.259e-14 ***
diff(log(capital), 3) -0.306741   0.037957  -8.0813 3.445e-13 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Total Sum of Squares:    253.01
Residual Sum of Squares: 0.085322
R-Squared:      0.99966
Adj. R-Squared: 0.99965
F-statistic: 65710.6 on 6 and 133 DF, p-value: < 2.22e-16
```

Número de observações utilizadas (cross-section)

R^2 da regressão cross-section (B1)

Estimadores de Efeitos Aleatórios

- Voltemos novamente ao problema de estimar os coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ na equação abaixo:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t} \qquad \text{(A)}$$

- Uma das grandes desvantagens de utilizarmos regressão de painel com efeitos fixos é que não podemos incluir no lado direito da equação variáveis explicativas que não variam no tempo
- Quando o termos α_i não são correlacionados com os erros $\epsilon_{i,t}$, nós podemos empregar estimadores de efeitos aleatórios
- Esses estimadores permitem a inclusão de variáveis explicativas que não variem no tempo, o que pode ser muito útil em várias situações
- Vamos reescrever a equação (A) na forma

$$y_{i,t} = \alpha + (\alpha_i - \alpha) + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \epsilon_{i,t}$$

- Simplificando, temos:

$$y_{i,t} = \alpha + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \alpha_i^* + \epsilon_{i,t} \qquad \text{(E)}$$

- Para o estimador de efeitos aleatórios, o termo $\alpha_i^* = (\alpha_i - \alpha)$ é considerado uma variável aleatória, com média 0 e variância σ_α^2

Estimadores de Efeitos Aleatórios

- Para o estimador de efeitos aleatórios, o termo α_i^* é considerado uma variável aleatória, com média 0 e variância σ_α^2

$$y_{i,t} = \alpha + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \alpha_i^* + \epsilon_{i,t}$$

- No caso dos estimadores de efeitos aleatórios, podemos considerar um erro composto $\nu_{i,t} = \alpha_i^* + \epsilon_{i,t}$, resultando

$$y_{i,t} = \alpha + \beta_1 x_{1,i,t} + \beta_2 x_{2,i,t} + \ \ldots + \beta_k x_{k,i,t} + \nu_{i,t} \qquad \text{(E1)}$$

- O estimador de efeitos aleatórios nada mais é do que um estimador de mínimos quadrados, com base na equação (E1), levando em consideração a estrutura de variância dos erros, devido à composição $\nu_{i,t} = \alpha_i^* + \epsilon_{i,t}$

- Para isso, rodamos um estimador de mínimos quadrados ordinários na equação

$$(y_{i,t} - \hat{\lambda}\bar{y}_{i,.}) = \alpha^* + \beta_1 (x_{1,i,t} - \hat{\lambda}\bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k (x_{k,i,t} - \hat{\lambda}\bar{x}_{k,i,.}) + \nu_{i,t}^*$$

- Onde:

$$\hat{\lambda} = 1 - \frac{\sigma_\epsilon}{\sqrt{\sigma_\epsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}}$$

Estimadores de Efeitos Aleatórios

- Para isso, rodamos um estimador de mínimos quadrados ordinários na equação

$$(y_{i,t} - \hat{\lambda}\bar{y}_{i,.}) = \alpha^* + \beta_1(x_{1,i,t} - \hat{\lambda}\bar{x}_{1,i,.}) + \ \ldots \ + \beta_k(x_{k,i,t} - \hat{\lambda}\bar{x}_{k,i,.}) + \nu^*_{i,t}$$

- Onde:

$$\hat{\lambda} = 1 - \frac{\sigma_\epsilon}{\sqrt{\sigma_\epsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}}$$

- Outros tipos de estimadores de efeitos aleatórios estão disponíveis, e todos visam a separar a variabilidade dos termos idiossincráticos (σ_α^2) da variabilidade dos resíduos (σ_ϵ^2)

- Em alguns casos, dependendo da base de dados, é possível que haja problemas numéricos, incorrendo em valores negativos para alguns dos dois termos (σ_α^2 ou σ_ϵ^2)

- Resta agora estudarmos como identificar se devemos utilizar estimador de efeitos fixos ou estimador de efeitos aleatórios

- O teste comumente empregado é o teste de Hausman

```
> phtest(fixed, random)
```

Efeitos Fixos versus Efeitos Aleatórios

- O teste comumente empregado é o teste de Hausman, para diferenciar entre efeitos fixos e efeitos aleatórios

  > phtest(fixed, random)

- A diferença básica entre esses dois tipos de modelos é que, para os efeitos aleatórios, assumimos que não existe correlação entre os termos idiossincráticos α_i e os resíduos $\epsilon_{i,t}$; para o estimador de efeitos fixos, podemos ter ou não correlação entre α_i e $\epsilon_{i,t}$

- Podemos testar se existe ou não correlação de forma indireta

- Rodamos o estimador de efeitos fixos (por exemplo, within) e rodamos o estimador de efeitos aleatórios

- Testamos então a diferença, estatisticamente, entre os parâmetros estimados pelos dois estimadores

- Se tivéssemos apenas um coeficiente δ, a estatística de Hausman teria a forma:

$$T = \frac{\hat{\delta}_{FE} - \hat{\delta}_{RE}}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\delta}_{FE}) - \hat{Var}(\hat{\delta}_{RE})}}$$

Efeitos Fixos versus Efeitos Aleatórios

- Na prática, temos mais de coeficientes para testarmos (coeficientes do modelo de regressão de painel)
- Nesse caso, a estatística de Hausman tem uma expressão mais complexa, mas a ideia é a mesma
- A hipótese nula do teste é que os coeficientes são conjuntamente diferentes do modelo de efeitos fixos e de efeitos aleatórios
- Dado que o método de efeitos fixos é mais flexível, caso rejeitemos a hipótese nula, rejeitamos indiretamente o modelo de efeitos aleatórios
- Caso rejeitemos a hipótese nula, mantemos o modelo de efeitos fixos; caso contrário, podemos usar o modelo de efeitos aleatórios
- Além disso, é necessário testar se de fato precisamos de um modelo com termos idiossincráticos α_i
- Para isso, temos um teste específico, para o qual a hipótese nula é H_0: $\sigma_\alpha^2 = 0$; caso rejeitemos a hipótese nula, justifica-se o uso de modelos de efeitos fixos ou aleatórios; caso contrário, podemos usar o pooled OLS

```
pFtest(fixed1, pooled1)
```

Regressão com Dados de Painel

- Diante das várias possibilidades de tipos de estimadores, é importante termos uma sequência de procedimentos para empregar na prática

- Procedimento geral para estimação de modelos de painel:

  - Estime um modelo de efeitos fixos, utilizando estimador within ou de primeiras diferenças

  - Estime um modelo de efeitos aleatórios

  - Use o teste de Hausman; se as estimativas dos coeficientes $\beta_1, \dots, \beta_k$ forem significantemente diferentes, o estimador de efeitos fixos será mais apropriado

  - Caso contrário, teste a hipótese nula de que a variância σ_α^2 entre os termos α_i é igual a zero (H_0: $\sigma_\alpha^2 = 0$)

  - Se rejeitamos a hipótese nula H_0: $\sigma_\alpha^2 = 0$, então o estimador de efeitos aleatórios serão o mais apropriado

  - Caso contrário, podemos usar o Pooled MQO

Regressão com Dados de Painel

- Exercício – para entregar em duas semanas

Com base no arquivo “Analise_de_Regressao_com_Dados_Painel.R”, considere o modelo com dados de painel, com a fórmula:

```
formula <- log(gsp) ~ log(water) + log(hwy) + log(util) + log(pc) + lag(log(gsp), 1)
                      + lag(log(emp), 1) + log(pcap)
```

Questão 1: rode um modelo de efeitos fixos com estimador ‘within’

Questão 2: rode um modelo de efeitos aleatórios, usando o default do plm

Questão 3: compare o estimador de efeitos fixos ao estimador de efeitos aleatórios, usando um teste de Hausman

Questão 4: rode um modelo sem os termos idiossincráticos

Questão 5: teste a necessidade dos termos idiossincráticos, usando teste de hipótese

Questão 6: qual modelo você usaria ao final dos procedimentos?