Introdução ao Software R e à Análise Econométrica

Agosto de 2018

Alexandre Xavier Ywata Carvalho
Geraldo Sandoval Góes

Introdução à Regressão Logística

Regressão com Resposta Binária

- Considere o modelo de regressão tradicional:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

- Nesse modelo, a variável dependente y_i geralmente é uma variável contínua (renda per capita, taxa de mortalidade etc.)

- Uma das hipóteses básicas comumente encontrada nos livros de estatística é que variável y_i possui distribuição normal; essa hipótese não necessita ser verdadeira, para que possamos utilizar os modelos de regressão linear

- Por outro lado, há diversas situações nas quais seria interessante termos um modelo de regressão adaptado, para diferentes tipos de variável resposta

- Uma dessas situações correspondem aos casos nos quais a variável resposta é uma variável binária

- A variável resposta pode corresponder a, por exemplo: cliente pagou ou não pagou o empréstimo, o curso de pós-graduação foi ou não bem sucedido, o imóvel é alugado ou próprio etc.

Regressão com Resposta Binária

- Na prática, precisamos codificar devidamente as duas alternativas para as variáveis resposta
- A codificação mais comum é através da utilização dos valores 0 e 1; por exemplo, 0 corresponde a imóvel alugado e 1 corresponde imóvel próprio; 0 corresponde a um curso mal sucedido e 1 corresponde a um curso bem sucedido
- Dessa forma, podemos sempre utilizar um template mais geral, com uma variável resposta y_i assumindo valores 0 ou 1 (importante ter claramente na nossa mente o que é o valor 0 e o que é o valor 1)
- Portanto, na nossa tabela de dados, precisamos ter uma coluna, com valores estritamente 0 ou 1, dependendo da categoria da variável resposta
- Em geral, os softwares estatísticos estão preparados para trabalhar com outras categorizações, não somente 0 e 1 apenas. O usuário pode indicar qual a categoria corresponde à situação de “sucesso”
- O termo “sucesso” utilizado nesse caso vem da variável aleatória de Bernoulli

Regressão com Resposta Binária

Situação do Imóvel	Idade do Chefe	Número de Residentes	Renda Familiar (R$)	Variável Y (Preencher ...)
Alugado	46	3	2200	
Alugado	50	2	1500	
Próprio	28	4	4600	
Alugado	31	4	2823	
Próprio	63	3	4100	
Próprio	53	2	1200	
Alugado	36	2	7800	
Alugado	51	3	3230	
Próprio	42	6	5622	

Regressão com Resposta Binária

- A variável aleatória de Bernoulli, tradicionalmente vista nos livros de estatística, corresponde a uma variável que assume apenas dois valores, 0 ou 1, sendo que 1 corresponde à situação de "sucesso" e 0 à situação de "insucesso". Obviamente, esses termos são totalmente ilustrativos

- O importante nessa conceituação é que, atrelado ao evento de sucesso, temos uma probabilidade. Essa probabilidade de sucesso é normalmente representada pela letra *p*, e está entre 0 e 1

- Um exemplo muito comum da variável de Bernoulli é a variável aleatória associada a jogarmos uma moeda

- Cara corresponde a "sucesso" e tem probabilidade de $p = 50\%$ (assumindo que a moeda é não viciada)

- Seja X então a variável aleatória nesse caso. Sabemos que X assume valores 0 ou 1 (de acordo com a nossa codificação, sendo que escolhemos arbitrariamente que 1 corresponde a "cara" e 0 a "coroa")

- Lembrando que o espaço amostral *S* corresponde ao conjunto de valores possíveis de uma variável aleatória. Nesse caso, $S = \{0, 1\}$

- Como podemos modelar então um caso mais geral de jogada de uma moeda *N* vezes, e contagem do número de vezes que a moeda resultou "cara"?

Variável Aleatória Binomial

- **Variável aleatória binomial** – trata-se de um "template" muito utilizado, para modelar, por exemplo, o número ocorrência de "sucesso" em N tentativas. Por exemplo, em um grupo de 100 pacientes, quantos têm algum tipo de câncer. O número de pacientes com câncer entre os 100 no grupo pode ser modelado por uma variável aleatória binomial.

- O espaço amostral de uma variável aleatória binomial é dado por S = {0, 1, 2, 3, 4, ... , N}

- A função de frequência de uma variável aleatória binomial tem expressão:

$$\text{Prob}[X = x] = f(x) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

- O símbolo $\binom{N}{x}$ corresponde ao número de combinações possíveis de x elementos entre os N totais

$$\binom{N}{x} = \frac{N!}{x!\,(N-x)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (N-1) \times N}{(1 \times 2 \times \cdots \times x) \times (1 \times 2 \times \cdots \times (N-x))}$$

- Em geral, N é conhecido e procura-se estimar o parâmetro *p* com base em uma amostra. O parâmetro *p* pode ser interpretado como a probabilidade de um indivíduos no grupo ter câncer. Portanto, *p* varia entre 0 e 1.

- Quando N = 1, a variável binomial é chamada variável de Bernoulli, e tem S = {0,1}

Variável Aleatória Binomial

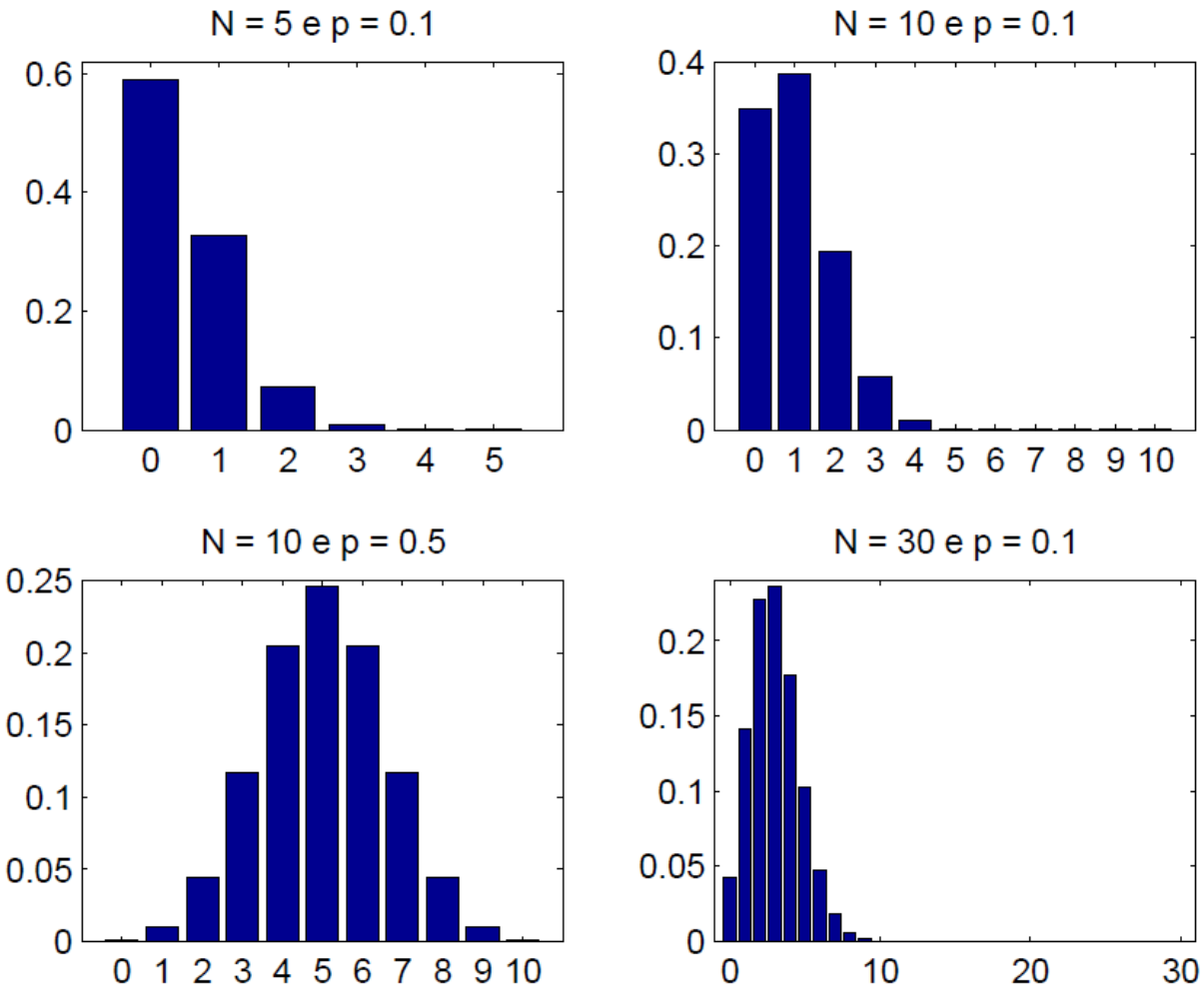


Figura 3.1: Função de frequência para a variável aleatória binomial.

Exercícios

- Exercício. Seja X uma variável aleatória binomial, com parâmetros N = 10 e p = 0.2. Determine:

  (a) O espaço amostral S
  (b) f(0) = Prob[X = 0]
  (c) f(1) = Prob[X = 1]
  (d) f(10) = Prob[X = 10]
  (e) f(6) = Prob[X = 6]
  (f) A probabilidade de que X seja menor ou igual a 3 (Prob[X <=3])
  (g) A probabilidade de que X seja maior ou igual a 6 (Prob[X >= 6])

- Para a variável aleatória binomial, algumas funções úteis no R

  dbinom(x, size, prob, log = FALSE)
  pbinom(q, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
  qbinom(p, size, prob, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
  rbinom(n, size, prob)

Simulações com Variáveis Aleatórias

```
#--- simulações de Monte Carlo com variáveis binomiais (10 tentativas e prob = 0.2)

amostra <- rbinom(n=20, size=10, prob=0.2)
amostra
amostra <- rbinom(n=200, size=10, prob=0.2)
amostra
amostra <- rbinom(n=20000, size=10, prob=0.2)
hist(amostra, col = "red")

media <- mean(amostra)
media
variancia <- var(amostra)
Variancia

#--- simulações de Monte Carlo com variáveis de Bernoulli

amostra <- rbinom(n=200, size=1, prob=0.2)
amostra
amostra <- rbinom(n=20000, size=1, prob=0.2)
hist(amostra, col = "red")

media <- mean(amostra)
media
variancia <- var(amostra)
variancia
```

Momentos de Variáveis Aleatórias

- Nos exemplos anteriores, vocês simularam diferentes valores aleatoriamente para algumas das distribuições “template”
- Com base nos valores simulados, vocês encontraram estimativas para as médias e para as variâncias (e consequentemente para os desvios padrões) dessas distribuições
- Essas estimativas parecem estáveis quando aumentamos o número de valores simulados
- Quando alteramos os parâmetros livres das variáveis aleatórias simuladas, os valores de estimativas para as médias e variâncias também se alteram
- A pergunta então é:

  É possível antecipar quais valores de média e variância (e desvio padrão) serão obtidos?

  De outra forma:

  Para determinados valores dos parâmetros das distribuições “template”, qual os valores de média e de variância?

Momentos de Variáveis Aleatórias

- Os valores das médias e variâncias para as variáveis aleatórias “template”, e outras de forma geral, podem ser obtidas a partir das funções de frequência f(x) = Prob[X = x]

- Definimos como **média**, **valor esperado, expectância** ou **primeiro momento** de uma variável aleatória discreta, com função de frequência f(x), o somatório:

$$E[X] = \sum_{x \in S} x \times f(x) = \sum_{x \in S} x \times \text{Prob}[X = x]$$

- O somatório ocorre para todos os valores de x no espaço amostral S

- Exemplo: considere uma variável aleatória discreta com função frequência f(0) = f(1) = f(2) = 0.2, e espaço amostral S = {0, 1, 2, 3}. A média dessa variável aleatória é dada por:

E[X] = 0 x 0.2 + 1 x 0.2 + 2 x 0.2 + 3 x 0.4 = 1.8

- Exercício. Seja X uma variável aleatória discreta, com S = {1, 2, 3, 4}, e função frequência f(1) = f(2) = f(3) = 0.2. Encontre a média dessa distribuição.

- Exercício. Seja X uma variável aleatória discreta, com S = {2, 4, 6, 8}, e função frequência f(2) = f(4) = f(6) = 0.2. Encontre a média dessa distribuição.

Momentos de Variáveis Aleatórias

- Definimos como **variância**, ou **segundo momento centrado** de uma variável aleatória discreta, com função de frequência f(x), o somatório:

$$Var[X] = \sum_{x \in S} \left[x - E[X]\right]^2 \times f(x) = \sum_{x \in S} \left[x - E[X]\right]^2 \times \text{Prob}[X = x]$$

- O somatório ocorre para todos os valores de x no espaço amostral S

- Exemplo: considere uma variável aleatória discreta com função frequência f(0) = f(1) = f(2) = 0.2, e espaço amostral S = {0, 1, 2, 3}. A variância dessa variável aleatória é dada por:

$$E[X] = [0 - 1.8]^2 \times 0.2 + [1-1.8]^2 \times 0.2 + [2-1.8]^2 \times 0.2 + [3-1.8]^2 \times 0.4 = ?$$

- Exercício. Seja X uma variável aleatória discreta, com S = {1, 2, 3, 4}, e função frequência f(1) = f(2) = f(3) = 0.2. Encontre a variância dessa distribuição.

- Exercício. Seja X uma variável aleatória discreta, com S = {2, 4, 6, 8}, e função frequência f(2) = f(4) = f(6) = 0.2. Encontre a variância dessa distribuição.

Momentos de Variáveis Aleatórias

- Para variáveis aleatórias "template" que vimos acima, existem formas bem definidas para as médias e as variâncias

- Para a variável aleatória X de Bernoulli, para a qual S = {0,1}, considerando-se uma probabilidade de sucesso p = 0.1, calcule a média e a variância:

  $E[X] = 1 \times 0.1 + 0 \times 0.9 = 0.1$
  $Var[X] = [1 - 0.1]^2 \times 0.1 + [0 - 0.1]^2 \times 0.9 = 0.9^2 \times 0.1 + (-0.1)^2 \times 0.9 = 0.9 \times 0.1$

- Para a variável aleatória X de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p = 0.5, calcule a média a variância:

  $E[X] = 1 \times 0.5 + 0 \times 0.5 = 0.5$
  $Var[X] = [1 - 0.5]^2 \times 0.5 + [0 - 0.5]^2 \times 0.5 = 0.5^2 \times 0.5 + (-0.5)^2 \times 0.5 = 0.5 \times 0.5$

- De maneira mais gera, pode-se mostrar que para uma variável de Bernoulli, com parâmetro p (entre 0 e 1), temos:

  $E[X] = p$
  $Var[X] = p \times (1 - p)$

Momentos de Variáveis Aleatórias

- Conforme discutimos anteriormente, uma variável de Bernoulli corresponde a uma variável aleatória binomial, com N = 1

- De maneira mais gera, para uma variável aleatória binomial, com parâmetros N e p, temos a média:

$$E[X] = \sum_{x \in S} x \times f(x) = \sum_{x=0}^{N} x \times \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

- A variância é dada por:

$$Var[X] = \sum_{x \in S} \left[x - E[X]\right]^2 \times f(x) = \sum_{x=0}^{N} \left[x - E[X]\right]^2 \times \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$$

- Pode-se mostrar que, para a variável aleatória de binomial, com parâmetros N e p:

$$\boldsymbol{E[X] = N \times p}$$
$$\boldsymbol{Var[X] = N \times p \times (1-p)}$$

Exercícios

- **Exercício 7 - para entregar em 2 semanas:**
  - Como de costume, os exercícios podem ser entregues em grupos de 2 ou três alunos, e o grupo deve submeter o código em R utilizado para responder ao exercício, juntamente com a discussão dos resultados
  - Utilize como base o código em R 'Analise_de_Regressao_com_Variaveis_Binarias'
- Questão 1. Seja X uma variável aleatória binomial, com parâmetros N = 25 e p = 0.6. Utilizando os códigos de demonstração em R, responda:

  (a) Utilizando 10000 valores gerados aleatoriamente, encontre uma estimativa para a média dessa distribuição

  (b) Utilizando 10000 valores gerados aleatoriamente, encontre uma estimativa para a variância dessa distribuição

  (c) Quais os valores "teóricos" da média e da variância para essa distribuição?

  (d) Os valores "teóricos" correspondem aos valores estimados via simulações de Monte Carlo?

O Modelo de Regressão Logística

- Conforme vimos acima, a variável de Bernoulli assume valores 0 ou 1, com probabilidade de sucesso Prob[Y = 1] = *p*, e probabilidade de insucesso Prob[Y= 0] = 1-*p*
- Como adaptar então o conceito de variável de Bernoulli ao conceito de regressão?
- Vamos agora tratar então da chamada regressão logística
- Consideremos então uma base de dados de unidades observacionais (indivíduos, domicílios, municípios, países, cursos de pós-graduação etc.)
- Para cada unidade observacional, temos uma variável y_i assumindo valores 0 ou 1, e temos um conjunto de colunas que podem ser usadas para construirmos variáveis explicativas $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{k,i}$
- A ideia básica da regressão logística é assumir que cada valor individual y_i corresponde a uma variável aleatória de Bernoulli, com probabilidade de sucesso (por exemplo, indivíduo ter câncer – paradoxalmente!) dada por $\mathrm{Prob}[y_i = 1] = p_i$
- **O "pulo do gato" é fazer com que $\mathbf{Prob}[y_i = 1] = p_i$ dependa das variáveis explicativas $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{k,i}$**

O Modelo de Regressão Logística

- **O "pulo do gato" é fazer com que $\mathbf{Prob}[y_i = 1] = p_i$ dependa das variáveis explicativas $x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{k,i}$**

- Uma possível alternativa é assumir

$$\text{Prob}[y_i = 1] = p_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki}$$

- O problema da alternativa acima é que $Prob[y_i = 1] = p_i$ tem que estar estritamente no intervalo [0, 1]

- O termo $\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki}$, por outro lado, pode assumir valores menores do que 0 ou maiores do que 1

- Modelo de regressão logística:

$$\text{Prob}[y_i = 1] = p_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ \ldots + \beta_k x_{ki}}}$$

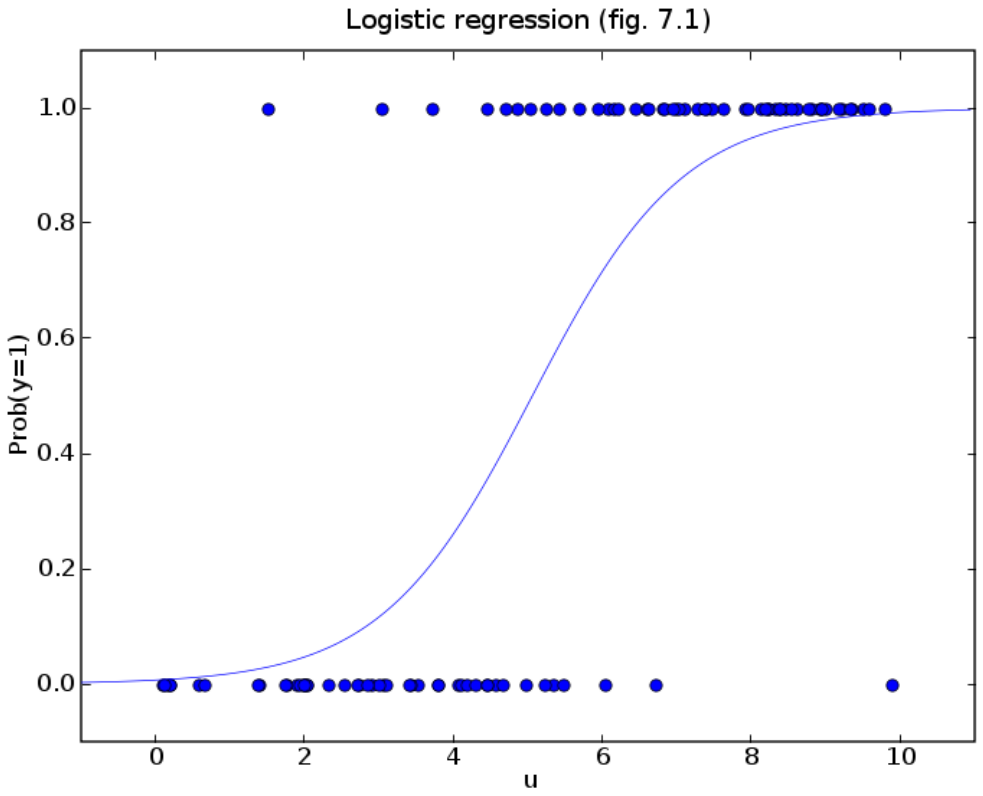
- A fórmula acima implica que as probabilidades p_i vão se situar o intervalor (0,1), como desejado

- Pode-se mostrar que, quando β_1 é positivo, quando x_{1i} aumenta, a probabilidade de "sucesso" também aumenta

O Modelo de Regressão Logística

- Considere um modelo simplificado de regressão logística, no qual temos a probabilidade de sucesso dada por

$$\text{Prob}[y_i = 1] = p_i = \frac{e^{\alpha+\beta x_{1i}}}{1+e^{\alpha+\beta x_{1i}}}, \text{ com } \beta > 0$$



Regressão Logística no R

```
dados3$alta_mort_infantil <- ifelse(dados3$mort_infantil > 24, 1, 0)

#------------------------------------------------------------
#---- rodando uma regressão logística
#------------------------------------------------------------

mod1 <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita,
        family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod1)

mod2 <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ indice_gini,
        family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod2)

mod3 <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ perc_criancas_extrem_pobres,
        family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod3)

mod4 <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados,
        family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod4)
```

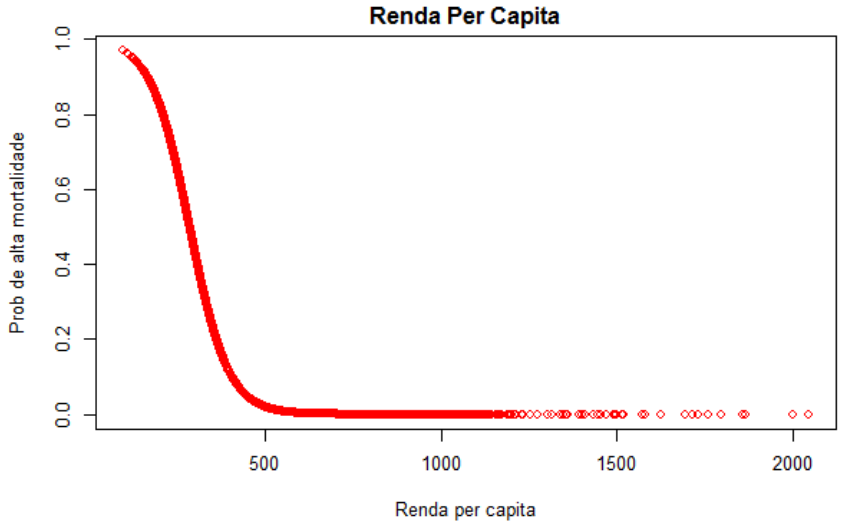
Regressão Logística no R

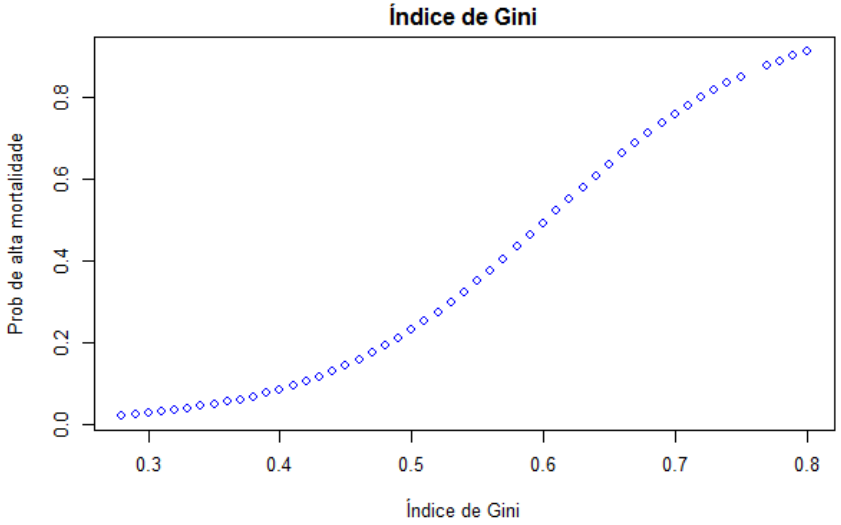
```
> summary(mod1)

Call:
glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita, family = binomial(link = "logit"),
    data = dados3)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4659  -0.2831  -0.0536  -0.0003   3.1928

Coefficients:
                Estimate   Std. Error  z value      Pr(>|z|)
(Intercept)     5.2070406  0.1834282   28.39   <2e-16 ***
renda_per_capita -0.0182626  0.0006154  -29.68   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6163.7  on 5563  degrees of freedom
Residual deviance: 3042.4  on 5562  degrees of freedom
AIC: 3046.4

Number of Fisher Scoring iterations: 7
```

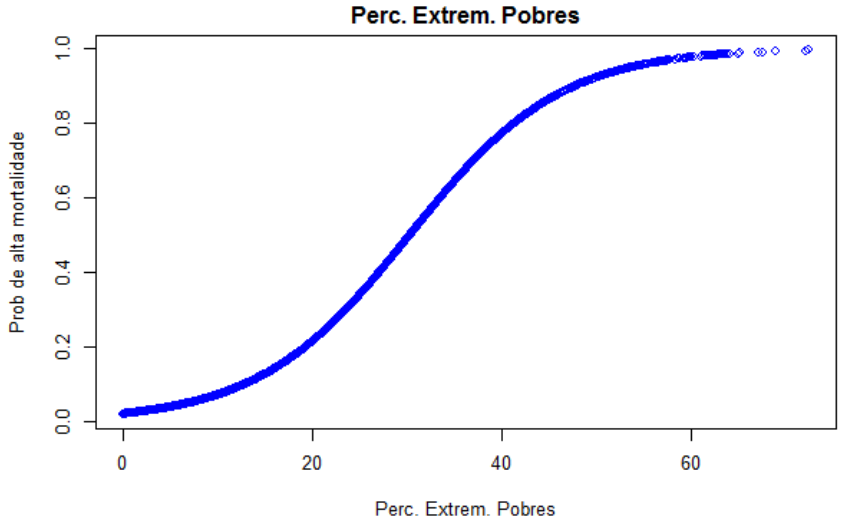
Regressão Logística no R

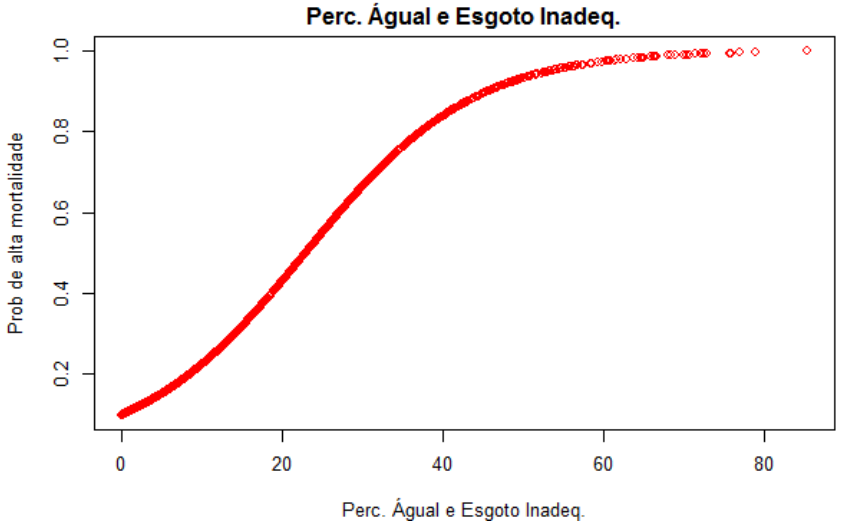
```
> summary(mod4)

Call:
glm(formula = alta_mort_infantil ~ perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados,
    family = binomial(link = "logit"), data = dados3)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.4654  -0.5446  -0.4690  -0.4570   2.1500

Coefficients:
                                                Estimate   Std. Error   z value       Pr(>|z|)
(Intercept)                                    -2.206750   0.051311  -43.01   <2e-16 ***
perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados    0.096166   0.003172   30.32   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6163.7  on 5563  degrees of freedom
Residual deviance: 4819.0  on 5562  degrees of freedom
AIC: 4823

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Regressão Logística no R









Exemplo

Table 4. Final logistic regression model of the variable amputation as a function of social and clinical variables

Variable	β	S.E.	Wald χ^2	df	p-value	OR	95% CI
Lack of primary care assistance	1.193	0.584	4.176	1	0.041	3.30	1.05–10.36
Previous amputation	2.390	0.740	10.434	1	0.001	10.91	2.56–46.51
CKD	0.835	0.576	2.102	1	0.147	2.31	0.75–7.12
CAD	1.68	0.689	5.92	1	0.015	5.35	1.38–20.68
AA	2.77	1.07	6.67	1	0.010	15.90	1.95–129.63
Hemoglobin A1C	1.58	0.282	31.46	1	<0.001	4.87	2.80–8.47
Constant	−14.33	2.32	38.18	1	<0.001	--	---

Rcr (Cox and Snell R^2)=0.547; RN (Nagelkerke R^2)=0.749

B: Coefficient of the logistic regression equation to predict the dependent variable using the independent variable.

SE: Standard errors associated with the coefficients.

Wald: Wald chi-squared test to test the null hypothesis that the constant is equal to 0

df: Degree of freedom for the Wald chi-squared test.

Método de Máxima Verossimilhança

- Da mesma forma que no caso da regressão linear, com base em uma amostra de observações, queremos estimar os parâmetros desconhecidos $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$
- O método comumente utilizado nesse caso é o método de "máxima verossimilhança"
- Para cada observação *i*, a probabilidade que observaremos y_i=1 é igual a p_i, enquanto a probabilidade de observarmos y_i=0 é igual a (1-p_i)
- De maneira compacta, podemos dizer que a probabilidade de observar o valor y_i (0 ou 1) é igual a

$$\text{Prob}[y_i] = p_i^{y_i} \times (1 - p_i)^{1-y_i}$$

- De fato, se y_i=1, $\text{Prob}[y_i = 1] = p_i^1 \times (1 - p_i)^{1-1} = p_i$
- De fato, se y_i=0, $\text{Prob}[y_i = 0] = p_i^0 \times (1 - p_i)^{1-0} = (1 - p_i)$
- A probabilidade de observar toda amostra é dada pelo produto das probabilidades individuais (assumindo que as observações são independentes)

$$\text{Prob}[y_1, \dots, y_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} \times (1 - p_i)^{1-y_i}$$

Método de Máxima Verossimilhança

- A função de verossimilhança é justamente a probabilidade de observar o que de fato encontramos na amostra, ou seja $\text{Prob}[y_1, \dots, y_n] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} \times (1 - p_i)^{1-y_i}$
- Considere então um vetor qualquer de parâmetros $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$
- A função de verossimilhança, assumindo que os valores y_i são variáveis de Bernoulli, independentes, é escrita como

$$L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{y_i} \times (1 - p_i)^{1-y_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}}} \right]^{y_i} \times \left[\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}}} \right]^{1-y_i}$$

- O método de máxima verossilhança é comumente empregado para estimar os parâmetros do modelos de regressão de forma geral
- O método consistem em encontrar os valores dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ para os quais a função $L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ atinge um valor máximo
- Note que os valores de $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{k,i}$ e y_i são conhecidos, dado que estamos usando uma amostra disponível

Método de Máxima Verossimilhança

- Conforme vimos anteriores, por motivos numéricos e analíticos, trabalhamos com o log da função de verossimilhança, ao invés da função original

$$\log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log p_i + (1 - y_i) \log(1 - p_i)$$

$$\log \underset{n}{L}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$$
$$= \sum_{i=1} y_i [\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}] - \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}}\right]$$

- Obtemos então os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ encontrando o máximo da função de log-verossimilhança $\log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$

- Uma das formas de se encontrar os máximos de uma função é encontrar as derivadas e igualar as derivadas a zero

- Para o caso da estimação de máxima verossimilhança no caso de regressão linear, a técnica de achar as derivadas e igualar as derivadas a zero implica na fórmula fechada do estimador de mínimos quadrados ordinários

- Para regressão linear, o estimador de máxima verossimilhança é numericamente igual ao estimador de mínimos quadrados ordinários

Método de Máxima Verossimilhança

- No caso de regressão logística, não é possível encontrar uma fórmula fechada para o estimador dos parâmetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$
- Por isso, o R (e outros programas estatísticos) têm que efetuar uma maximização iterativa numérica, quando têm que estimar os parâmetros via máxima verossimilhança
- Considere um modelo simplificado de regressão logística, no qual temos a probabilidade de sucesso dada por

$$\text{Prob}[y_i = 1] = p_i = \frac{e^{\alpha+\beta x_{1i}}}{1 + e^{\alpha+\beta x_{1i}}}$$

- Nesse caso, temos dois parâmetros desconhecidos α e β
- A função de log verossimilhança tem expressão

$$\log L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i[\alpha + \beta x_{1i}] - \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 + e^{\alpha+\beta x_{1i}}\right]$$

- Maximizando $\log L(\alpha, \beta)$, encontramos os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para os parâmetros α e β

Regressão Logística no R

```
> summary(mod1)

Call:
glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita, family = binomial(link = "logit"),
    data = dados3)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4659  -0.2831  -0.0536  -0.0003   3.1928

Coefficients:
                Estimate   Std. Error  z value      Pr(>|z|)
(Intercept)    5.2070406  0.1834282   28.39   <2e-16 ***
renda_per_capita -0.0182626  0.0006154  -29.68   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6163.7  on 5563  degrees of freedom
Residual deviance: 3042.4  on 5562  degrees of freedom
AIC: 3046.4

Number of Fisher Scoring iterations: 7
```

Regressão Logística no R

```
> summary(mod1)

Call:
glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita, family = binomial(link = "logit"),
    data = dados3)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4659  -0.2831  -0.0536  -0.0003   3.1928

Coefficients:                                                    ???
                  Estimate   Std. Error  z value      Pr(>|z|)
(Intercept)      5.2070405  0.1834282    28.39   <2e-16 ***
renda_per_capita -0.0182626  0.0006154  -29.68   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6163.7  on 5563  degrees of freedom
Residual deviance: 3042.4  on 5562  degrees of freedom
AIC: 3046.4

Number of Fisher Scoring iterations: 7
```

Matriz de Variância-Covariância

Variâncias na diagonal principal e covariâncias fora da diagonal principal (matriz simétrica)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Cov}(X,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Z) & \mathrm{Cov}(Y,Z) & \mathrm{Var}(Z) \end{bmatrix}$$

Matriz de Correlações

Correlação entre as variáveis fora da diagonal principal (matriz simétrica com diagonal principal com todos os elementos iguais a 1)

```
. pwcorr
```

	Happin~s	Exercise	Sleep	Jobsat~n	Pets
Happiness	1.0000				
Exercise	0.6056	1.0000			
Sleep	-0.1952	-0.4974	1.0000		
Jobsatisfa~n	0.8601	0.7312	0.0246	1.0000	
Pets	0.6590	0.7897	-0.4082	0.5847	1.0000

Método de Máxima Verossimilhança

- Função de log verossimilhança tem expressão

$$\log L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i[\alpha + \beta x_{1i}] - \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 + e^{\alpha+\beta x_{1i}}\right]$$

- A matriz hessiana da função $\log L(\alpha, \beta)$ é dada pelas segundas derivadas da função de log verossimilhança

$$\text{Hessian}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log L(\alpha, \beta) & \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log L(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log L(\alpha, \beta) & \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log L(\alpha, \beta) \end{bmatrix}$$

- A partir da matriz hessiana, podemos obter os erros padrões das estimativas dos parâmetros

- A matriz de variância-covariância das estimativas $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ corresponde à inversa da matriz hessiana

$$\Sigma = -[\text{Hessian}(\alpha, \beta)]^{-1}$$

- Os erros padrões correspondem às raízes quadradas da diagonal principal da matriz Σ

Regressão Logística no R

vcov(mod1)

```
> vcov(mod1)
                             (Intercept)    renda_per_capita
(Intercept)              0.0336458958        -1.094468e-04
renda_per_capita    -0.0001094468         3.787026e-07
```

sqrt(diag(vcov(mod1)))

```
> sqrt(diag(vcov(mod1)))
         (Intercept)     renda_per_capita
   0.1834281762          0.0006153882
```

```
Coefficients:
                             Estimate    Std. Error  z value      Pr(>|z|)
(Intercept)              5.2070406  0.1834282   28.39   <2e-16 ***
renda_per_capita    -0.0182626  0.0006154  -29.68   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Para mais detalhes, vide Carvalho, Cajueiro e Camargo, “Introdução aos Métodos Estatísticos para Economia e Finanças”

Algoritmo Fisher-Scoring

- Considere a função de log verossimilhança, para uma regressão mais geral, com expressão

$$\log \underset{n}{L}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} y_i[\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}] - \sum_{i=1}^{n} \log\left[1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}}\right]$$

- O estimador de máxima verossimilhança busca encontrar o vector de coeficientes que maximiza a função acima

- Não é possível encontrar uma fórmula fechada para o vetor de coeficientes estimados $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$

- Vamos agora ilustrar o processo de estimação via máxima verossimilhança, através de um método interativo

- Método comumente utilizado é o método de Newton-Raphson. No caso de máxima verossimilhança, utiliza-se o método correlato, conhecido como Fisher-Scoring

- Esses métodos consistem em darmos um "chute" inicial para o vetor $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$

- Com base nesse chute inicial, a cada iteração, nós encontramos um novo valor do vetor $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$, cada vez mais próximo do vetor correspondente ao máximo

Algoritmo de Fisher-Scoring

- O algoritmo para quando novas iterações não implicam em mudanças no vetor $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$; nesse caso, dizemos que o algoritmo convergiu
- O item mais importante dos algoritmos iterativos é o passo de atualização do parâmetro sendo estimado
- Seja então o vetor $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ o vetor de coeficientes de interesse. No caso do algoritmo de Fisher-Scoring, o passo de atualização tem expressão:

$$\beta^{m+1} = \beta^m + H^{-1}(\beta^m) \times V(\beta^m)$$

- β^{m+1} é o novo vetor, atualizado no passo *m*
- β^m é o vetor do passo anterior
- O vetor $V(\beta^m)$ corresponde ao vetor de primeiras derivadas da função $\log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$
- A matriz $H^{-1}(\beta^m)$ corresponde à inversa da matriz hessiana $H(\beta^m)$ da função de log-verossimilhança, conforme vimos anteriormente
- Portanto, é importante calcular o vetor de derivadas $V(\beta^m)$ e a matriz de segundas derivadas $H(\beta^m)$

Algoritmo de Fisher-Scoring

- Pode-se mostrar que o vetor de derivadas $V(\beta)$ é dado por:

$$V(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \beta_0} \log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} \log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) \end{bmatrix} = X^T y \ - X^T p = X^T (y - p)$$

- Onde p é a probabilidade predita,

$$p = \begin{bmatrix} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \dots + \beta_k x_{k1}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} + \dots + \beta_k x_{k1}}} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \dots + \beta_k x_{kn}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \dots + \beta_k x_{kn}}} \end{bmatrix}$$

- X^T corresponde à matriz transporte da matriz de desenho X
- Uma fórmula semelhante pode ser derivada para a matriz hessiana $H(\beta^m)$

Algoritmo de Fisher-Scoring

- Utilizando o R, vamos ilustrar o algoritmo de Fisher-Scoring, com o passo de atualização com expressão:

$$\beta^{m+1} = \beta^{m} + H^{-1}(\beta^{m}) \times V(\beta^{m})$$

- O algoritmo visa chegar a um ponto β^{m+1} para o qual o vetor de primeiras derivadas $V(\beta^{m+1})$ é igual a zero (ou arbitrariamente próximo a zero)

- O algoritmo para quando encontramos um valor de norma de $V(\beta^{m+1})$ menor do que um valor arbitrário, ou quando β^{m+1} e β^{m} são muito próximos

- Vamos usar o critério de parada quando $|V(\beta^{m+1})|$ < 1e-8, por exemplo

- Podemos contar quantos passos o algoritmo faz até chegar à convergência, com base no nosso critério de parada

- Ao final do nosso processo iterativo, podemos comparar os resultados obtidos com os resultados obtidos utilizando-se a função do pacote em R

    - summary(modsimul)

Simulações de Monte Carlo

- Vamos agora estudar as propriedades do estimador de máxima verossimilhança via simulações de Monte Carlo
- As simulações de Monte Carlo consistem em repetirmos o processo observacional aleatório, e estimar, para cada amostra gerada, os parâmetros do modelo
- Vamos fazer de conta que conhecemos o parâmetro real do modelo, e vamos gerar amostras com base nesse parâmetro escolhido
- Com base nas amostras geradas, vamos estimar o modelo de regressão logística, e checar se o parâmetro estimado se aproxima do parâmetro 'real' (que é desconhecido na prática)
- Podemos então estudar algumas perguntas importantes:
    - O parâmetro estimado se aproxima do parâmetro "real"?
    - Qual a variabilidade das estimativas em torno do parâmetro estimado?
    - Como essa variabilidade se altera quando aumentamos o tamanho da amostra?
    - Qual a distribuição aproximada das estimativas para diferentes amostras?
    - O que significam então os intervalos de confiança?
    - Podemos analisar o comportamento das estatísticas teste?

Teste da Razão de Verossimilhança

- Para testar vários parâmetros ao mesmo tempo, o teste mais comumente empregado é o teste da razão de verossimilhança, ou likelihood ratio test (LRT)

- Vamos supor que queremos testar a hipótese nula conjunta:

$$H_0: \beta_2 = \beta_5 = 0$$

$$H_A: \beta_2 \neq 0 \text{ ou } \beta_5 \neq 0$$

- O teste de razão verossimilhança tem como estatística teste simplesmente a diferença

$$LRT = 2 \times [\log L(\beta) - \log L(\beta | \beta_2 = \beta_5 = 0)]$$

- $\log L(\beta)$ é o log-verossimilhança (no máximo) para o modelo sem restrição

- $\log L(\beta | \beta_2 = \beta_5 = 0)$ é o log-verossimilhança (no máximo), para o modelo com restrição, dada pela hipótese nula. Nesse caso, a restrição corresponde a simplesmente excluímos as variáveis x_2 e x_5 da regressão

- Qual a distribuição aproximada para essa estatística teste, assumindo que a hipótese nula é verdadeira (ou seja, $\beta_2 = \beta_5 = 0$)

Teste da Razão de Verossimilhança

- Intrinsecamente relacionado à estatística de log-likelihood está a estatística *Deviance*
- Essa estatística é dada pelo output da regressão, e tem expressão

$$Deviance = -2 \times \log L(\beta)$$

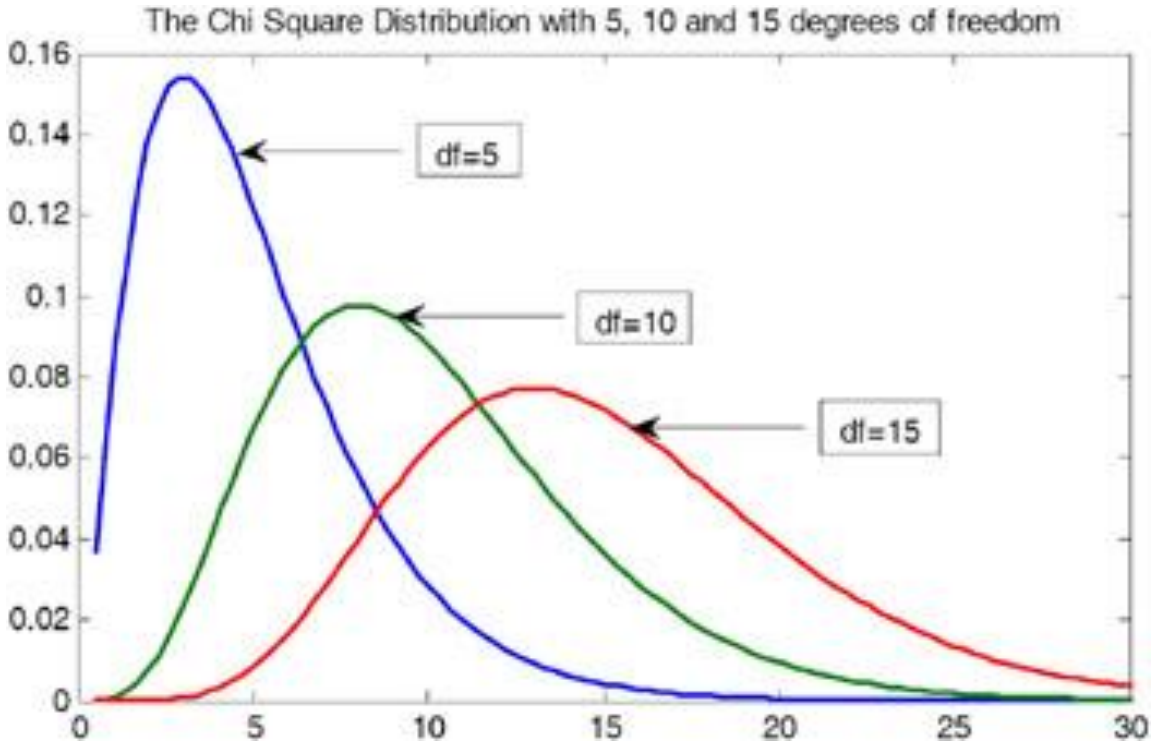
- Portanto,

$$LRT = 2 \times [\log L(\beta) - \log L(\beta | \beta_2 = \beta_5 = 0)]$$

$$= -[\text{Deviance}_{\text{irrest}} - \text{Deviance}_{\text{rest}}]$$

- Com $\text{Deviance}_{\text{irrest}}$ e $\text{Deviance}_{\text{rest}}$ correspondendo aos modelos irrestrito e restrito
- Quando a hipótese nula é verdadeira, ou seja, $\beta_2 = \beta_5 = 0$, a estatística teste LRT tem distribuição qui-quadrada, com número de graus de liberdade igual ao número de restrições no modelo
- Para duas restrições, o valor crítico da estatística teste é dado por valor_critico_5pc <- qchisq(0.95, 2) = 5.991465, para 5% de probabilidade de erro do tipo I

Teste da Razão de Verossimilhança



R^2 para Regressão Logística

- Em regressão linear, uma medida comumente utilizada para verificar o ajuste do modelo é o coeficiente de determinação
- No caso de regressão logística, há várias alternativas para o equivalente ao R^2 da regressão linear
- McFadden's R^2: $R^2_{McF} = 1 - \ln(L_M) / \ln(L_0)$, onde $\ln(L_0)$ é função de log-verossimilhança, para um modelo com apenas o intercepto
- Nagelkerke / Cragg & Uhler's:

$$R^2_{C\&U} = \frac{1 - \left[\frac{L_0}{L_M}\right]^{\frac{2}{n}}}{1 - L_0^{2/n}}, \text{com } 0 \leq R^2_{C\&U} \leq 1$$

- Cox & Snell (maximum likelihood):

$$R^2_{C\&S} = 1 - \left[\frac{L_0}{L_M}\right]^{\frac{2}{n}}$$

- No caso de Cox & Snell, o valor máximo não é 1. A interpretação dos pseudo-R^2 não são tão simples quando do R^2 no caso linear

Seleção de Variáveis

- Da mesma maneira que no caso de regressão linear, podemos usar os indicadores AIC e BIC para seleção de modelos
- Dentre vários modelos, podemos selecionar aquele (ou aqueles) com menor AIC ou BIC
- Critério de Informação de Akaike - AIC

$$AIC = -2 \log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + 2 \times p$$

O número *p* corresponde ao número de parâmetros livres na regressão. No caso da regressão logística, temos: um intercepto e k variáveis preditoras

$$p = 1 + k = 1 + k$$

- Critério de Informação Bayesiano - BIC

$$BIC = -2 \log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \log n \times p$$

- Os termos $[2 \times p]$ e $[\log n \times p]$, no AIC e BIC, correspondem a pênaltis para a inclusão adicional de variáveis
- Portanto, a inclusão de variáveis vai aumentar $\log L(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$, mas aumenta também os pênaltis $[2 \times p]$ e $[\log n \times p]$
- Como de costume, o BIC tende a selecionar modelos mais parcimoniosos

Regressão Logística no R

```
> summary(mod1)

Call:
glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita, family = binomial(link = "logit"),
    data = dados3)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4659  -0.2831  -0.0536  -0.0003   3.1928

Coefficients:
                  Estimate   Std. Error  z value      Pr(>|z|)
(Intercept)      5.2070406  0.1834282   28.39   <2e-16 ***
renda_per_capita -0.0182626  0.0006154  -29.68   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 6163.7  on 5563  degrees of freedom
Residual deviance: 3042.4  on 5562  degrees of freedom
AIC: 3046.4

Number of Fisher Scoring iterations: 7
```

O Modelo de Regressão Logística

- De maneira geral, várias das técnicas que nós vimos em regressão linear se aplicam também à regressão logística
    - Testes de hipótese para parâmetros individuais
    - Intervalos de confiança
    - Seleção de modelos
    - Testes de hipótese para vários parâmetros simultaneamente
- A syntax correspondente em R também é bastante similar ao que vimos para o caso de regressão linear
- Exemplos:

```
confint(mod5)              #--- probabilidade de cobertura de 95%
confint(mod5, level = 0.9)   #--- probabilidade de cobertura de 90%
confint(mod5, level = 0.8)   #--- probabilidade de cobertura de 80%

AIC(mod5); BIC(mod5)

anova(mod5.rest, mod5, test='LRT')

step1 <- step(mod5, direction = "backward")
step2 <- step(mod5, direction = "forward")
step3 <- step(mod5, direction = "both")
```

Interpretação dos Coeficientes da Reg Logística

- O método de máxima verossimilhança nos dá os coeficientes estimados para o modelo de regressão logística
- No entanto, precisamos entender qual o significado desses coeficientes. Como interpretá-los? Sabemos interpretar os sinais dos coeficientes, e precisamos agora entender a magnitude
- *Odds ratio* ou "razão de chances": o Bahia tem chance de 3 contra 1 de vencer o campeonato baiano. Nesse caso, a probabilidade do o Bahia ganhar é de 3/(3+1) = 75%
- Por outro lado, dado que o Bahia tem 75% de chance de vencer, a razão de chances é 0.75/0.25 = 3 contra 1
- Para a regressão logística, a razão de chances de sucesso versus insucesso (1 versus 0) é dada pela razão das probabilidades

$$\frac{p_i}{1-p_i} = \frac{\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}}{1-\left[\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}\right]} = \frac{\dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}}{\dfrac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}}}$$

$$\frac{p_i}{1-p_i} = e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ \ldots\ +\beta_k x_{ki}}$$

Interpretação dos Coeficientes da Reg Logística

- Portanto, para uma regressão logística, a razão de chances para a observação *i* é dada por

$$r_i = \frac{p_i}{1 - p_i} = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}}$$

- Imagine agora que a variável x_{1i} teve um incremente de uma unidade. A nova razão de chances vai ser

$$r_i^* = e^{\beta_0 + \beta_1 [1 + x_{1i}] + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}}$$

$$r_i^* = e^{\beta_1} e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_k x_{ki}}$$

$$r_i^* = e^{\beta_1} r_i$$

- Portanto, e^{β_1} indica o aumento (ou redução) da razão de chances quando aumentamos em uma unidade a variável x_{1i}

- Se x_{1i} for uma variável dummy indicando se o paciente teve um tratamento ou não, o termo e^{β_1} indica o quanto a razão de chances se altera quando o paciente passa pelo tratamento (versus quando ele não passa)

- A maioria dos softwares estatísticos reporta os termos e^{β_1} para todos os coeficientes no modelo. É possível também extrair intervalos de confiança para e^{β_1}

Interpretação dos Coeficientes da Reg Logística

- O código abaixo calcula os valores para e^{β_1}, com os respectivos intervalos de confiança, com 95% de probabilidade de cobertura

```
#---- odds-ratio, com intervalos de confiança de 95%

mod5.reduzido <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita
            + indice_gini
            + salario_medio_mensal
            + perc_criancas_extrem_pobres
            + perc_criancas_pobres
            + perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados
            + perc_pessoas_dom_paredes_inadequadas
            + perc_pop_dom_com_coleta_lixo
            + perc_pop_rural
            + as.factor(Regiao),
            family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod5.reduzido)

data.frame(exp(coef(mod5.reduzido)), exp(confint(mod5.reduzido)))
```

Classificação com Regressão Logística

- Ao final da estimação da regressão logística, a regressão vai nos fornecer as probabilidades preditas de uma determinada observação ter valor 1 (“sucesso”) ou 0 (“insucesso”)

- No entanto, em muitas situações, gostaríamos de classificar aquela observação como 0 ou 1, com base nas variáveis preditoras

- Por exemplo, com base nas características de um cliente no banco, gostaríamos de classifica-lo como potencial pagador ou potencial inadimplente

- Com base em um valor definido de corte c, uma das formas de fazer isso é através da regra:

  Caso a probabilidade predita $p_i > c$, então a observação i é classificada na categoria “sucesso”

  Caso a probabilidade predita $p_i \leq c$, então a observação i é classificada na categoria “insucesso”

- Por exemplo, podemos assumir c = 0.50

- Como averiguar quão boa ou ruim é essa regra de classificação? Quais os indicadores usados para fazer essa averiguação?

Classificação com Regressão Logística

- Normalmente, as medidas de qualidade da classificação estão relacionadas ao grau de acerto das classificações
- Por exemplo, um indicador comumente empregado é a chamada matriz de "confusão" (*confusion matrix*)
- Essa matriz corresponde a uma tabulação cruzada entre a classificação de acordo com o algoritmo e a classificação real observada na amostra

	Classificação 0 observada	**Classificação 1 observada**
Classificação 0 predita	Verdadeiro negativo	Falso negativo
Classificação 1 predita	Falso positivo	Verdadeiro positivo

- Com base nessa matriz, diversas medidas numéricas de performance da classificação podem ser calculadas: acurácia, precisão, recall e score F-1

Classificação com Regressão Logística

```
#-------------------------------------------------------
#--- classificação com regressão logit
#-------------------------------------------------------

mod6 <- glm(formula = formula(step3),
          family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod6)

corte <- 0.5

dados3$pred_alta_mortalidade <- ifelse(mod6$fitted.values > 0.5, 1, 0)

#--- matriz de comparação da classificação

table(dados3$pred_alta_mortalidade)
table(dados3$pred_alta_mortalidade, dados3$alta_mort_infantil)
```

```
> table(dados3$pred_alta_mortalidade, dados3$alta_mort_infantil)

          0       1
  0    3815     188
  1     400    1161
```

Classificação com Regressão Logística

- Acurácia: corresponde ao percentual de casos que são corretamente classificados

$$\text{Acurácia} = \frac{[\text{positivos verdadeiros} + \text{negativos verdadeiros}]}{n}$$

- Precisão, para a classe C: corresponde ao percentual de observações na classe C que foram corretamente classificadas. Portanto, há um valor de precisão para cada classe (0 ou 1)

$$\text{Precisão}_1 = \frac{[\text{positivos verdadeiros}]}{[\text{positivos verdadeiros} + \text{falsos negativos}]} = \textbf{Sensitivity}$$

$$\text{Precisão}_0 = \frac{[\text{negativos verdadeiros}]}{[\text{negativos verdadeiros} + \text{falsos positivos}]} = \textbf{Specificity}$$

- Recall, para a classe C: corresponde ao percentual de previsões da classe C que foram corretamente classificadas. Portanto, há um valor de recall para cada classe (0 ou 1)

$$\text{Recall}_1 = \frac{[\text{positivos verdadeiros}]}{[\text{positivos verdadeiros} + \text{falsos positivos}]}$$

$$\text{Recall}_0 = \frac{[\text{negativos verdadeiros}]}{[\text{negativos verdadeiros} + \text{falsos negativos}]}$$

Classificação com Regressão Logística

- Score F-1, para a classe C: corresponde a uma combinação entre precisão e recall. Também há um valor de score F-1 para cada classe (0 ou 1)

$$scoreF1_1 = \frac{2 \times Precisão_1 \times Recall_1}{(Precisão_1 + Recall_1)}$$

$$scoreF1_0 = \frac{2 \times Precisão_0 \times Recall_0}{(Precisão_0 + Recall_0)}$$

- Podemos combinar as precisões, os recalls e os scores F-1, para obter medidas gerais, para a classificação como um todo:
    - Para isso, podemos fazer as médias das precisões, dos recalls e dos scores F-1, de todas as classes
- As medidas acima podem ser utilizadas em problemas mais gerais de classificação, nos quais podemos querer classificar em mais de duas classes
- No caso de classificação binária, podemos estar interessados mais diretamente na precisão, no recall e no score F-1 da classe 1 (“sucesso”)

Classificação com Regressão Logística

```
cmatrix <- table(dados3$pred_alta_mortalidade, dados3$alta_mort_infantil)
cmatrix

acuracia <- sum(diag(cmatrix))/sum(cmatrix)
acuracia

precisao <- diag(cmatrix) / colSums(cmatrix)
precisao

recall <- diag(cmatrix) / rowSums(cmatrix)
recall

scoreF1 <- 2 * precisao * recall / (precisao + recall)
scoreF1

resultados.class <- data.frame(precisao, recall, scoreF1)
resultados.class

macroPrecisao <- mean(precisao)
macroPrecisao

macroRecall <- mean(recall)
macroRecall

macroScoreF1 <- mean(scoreF1)
macroScoreF1

data.frame(macroPrecisao, macroRecall, macroScoreF1)
```

Modelos de Regressão Logística

- **Exercício 8:**
- Utilize como base o código em R ‘Analise_de_Regressao_com_Variaveis_Binarias’
  - Questão 1: Considere o modelo de regressão logística abaixo. Com valores de corte c = 0.3, 0.5 e 0.7, encontre as matrizes de “confusão” para a classificação de municípios com alta mortalidade infantil. Para esses mesmos valores de corte, encontre de acurácia, média das precisões, média dos recalls e média dos scores F-1

```
mod5.reduzido <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita
            + indice_gini
            + salario_medio_mensal
            + perc_criancas_extrem_pobres
            + perc_criancas_pobres
            + perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados
            + perc_pessoas_dom_paredes_inadequadas
            + perc_pop_dom_com_coleta_lixo
            + perc_pop_rural
            + as.factor(Regiao),
            family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod5.reduzido)
```

Modelos de Regressão Logística

- **Exercício 8 (continuação):**
- Utilize como base o código em R 'Analise_de_Regressao_com_Variaveis_Binarias'
  - Questão 2: Refaça a questão 1, considerando o modelo de regressão logística abaixo. Qual dos dois modelos (questão 1 ou questão 2) apresenta melhor critério de acurácia?

```
mod5.reduzido <- glm(formula = alta_mort_infantil ~ renda_per_capita
                     + indice_gini
                     + salario_medio_mensal
                     + perc_criancas_extrem_pobres
                     + perc_criancas_pobres
                     + perc_pessoas_dom_agua_estogo_inadequados
                     + perc_pessoas_dom_paredes_inadequadas
                     + perc_pop_dom_com_coleta_lixo
                     + perc_pop_rural
                     + as.factor(Regiao)
                     + as.factor(Regiao)*renda_per_capita,
                     family = binomial(link = "logit"), data = dados3)
summary(mod5.reduzido)
```

Curva ROC

- Uma das formas de avaliar a performance de classificação a partir de uma regressão logística é utilizando-se a curva ROC (*Receiver Operating Characteristic*)

- Lembrando a tabela de comparação entre observado e predito em classificação:

	Classificação 0 observada	**Classificação 1 observada**
Classificação 0 predita	Verdadeiro negativo	Falso negativo
Classificação 1 predita	Falso positivo	Verdadeiro positivo

- À medida que aumentamos o valor de corte, nós classificamos menos observações na categoria 1; portanto, aumentamos o número de falsos negativos e reduzimos o número de falsos positivos

- Duas medidas muito utilizadas para fins de classificação e detecção de doenças, por exemplo, é a sensibilidade (*sensitivity*) e a especificidade (*specificity*)

Curva ROC

- Lembrando:

$$\frac{[\text{positivos verdadeiros}]}{[\text{positivos verdadeiros} + \text{falsos negativos}]} = \textbf{Sensitivity}$$

$$\frac{[\text{negativos verdadeiros}]}{[\text{negativos verdadeiros} + \text{falsos positivos}]} = \textbf{Specificity}$$

- *Sensitivity* é a capacidade de detectar pacientes com câncer, dentre aqueles que de fato possuem câncer, por exemplo
- *Specificity* é a capacidade de detectar pacientes que não possuem câncer, dentre aqueles que de fato não possuem
- Quando aumentamos o valor de corte, aumentamos a sensitividade e reduzimos a especificidade
- A curva ROC nos fornece um gráfico da sensitividade versus a especificidade, quando aumentamos o valor de corte
- A curva sob a curva, conhecida com AUC (area under the curve), é usada como uma medida de qualidade do ajuste da regressão logística

Curva ROC