Macroeconometria – Séries de tempo

FAUSTO JOSÉ ARAÚJO VIEIRA

Aula 7

17 de abril a 22 de maio de 2018

RESUMO – VETOR AUTORREGRESSIVO (AULA ANTERIOR)

VAR(p)

- Diferentemente dos modelos univariados, o VAR busca responder qual a trajetória da série, dado um **choque estrutural**.
- Por trajetória, deseja-se conhecer o tempo que um choque afeta uma série, se ela muda de patamar ou não, para que patamar vai, entre outras informações.

Forma estrutural x Forma reduzida (lembrando)

Em matrizes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv B_0} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv B_1} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \varepsilon_t} \Longrightarrow$$

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\varepsilon_t .$$

A forma reduzida desse modelo simplificado é:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t; \qquad (2) \\ \Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0; \\ \Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1; \\ Ae_t &\equiv B\varepsilon_t . \end{aligned}$$

VAR - Resumo

- Identificação
- Estimação
- Função resposta ao impulso
- Intervalo de confiança
- Decomposição da variância
- Teste de causalidade – Granger
- VAR estrutural
- Decomposição Blanchard e Quah

RESUMO DA AULA

SUMÁRIO DESTA AULA

- VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS – VECM
- TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER
- TESTE DE ENGLE-GRANGER COM VARIÁVEIS I(2)
- MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS
- TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN
- DECOMPOSIÇÃO DA VARIÂNCIA
- FUNÇÃO RESPOSTA AO IMPULSO
- PROJEÇÃO

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS (VECM)

Lembrando: Regressão Espúria

- A necessidade de teoria econômica para definir variável explicada e explicativa torna-se muito importante na presença de raiz unitária.
- Podem-se encontrar relações estatísticas entre duas ou mais variáveis econômicas sem qualquer relação de causalidade entre uma e outra por puro acaso.
- Por exemplo, a regressão de uma variável $I(1)$ com outra $I(1)$ obtida independentemente gera alto R^2 e significante t-estatístico. Contudo, o resultado é sem significado econômico.

Lembrando: Regressão Espúria

Considere a seguinte experiência. Gere duas séries I (1) independentemente uma da outra e regrida uma contra a outra. Qual resultado você obtém? Em 75% das vezes, parecer-lhe-á que elas são correlacionadas.

Importante lembrar que espera-se que 95% das vezes, espera-se que as séries não sejam correlacionadas.

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Se séries de tempo não estacionárias têm uma dinâmica em comum, pode-se especificar um modelo VAR mais completo denominado modelo vetor de correção de erros - VECM.
- As variáveis contidas em X_t guardam uma relação de equilíbrio de longo prazo. Se a tendência estocástica for comum a todas as variáveis, há um equilíbrio de longo prazo. Há equilíbrio de longo prazo quando $X_t{}'\beta = 0$.
- No curto prazo há desvios dessa tendência comum, de modo que o termo u_t é o erro de equilíbrio.

(Engle e Granger) Os elementos do vetor X_t, $n \times 1$, são ditos cointegrados de ordem (d, b), denotados por $X_t \sim CI\,(d, b)$, se:
i. Todos os elementos de X_t são integrados de ordem d, ou seja, são $I\,(d)$;
ii. Existe um vetor não-nulo, β, tal que $u_t = X_t{}'\beta \sim I\,(d-b)$, $b > 0$.

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

Considere um vetor $\beta = \left[\begin{array}{cc} \widetilde{\beta}_1 & \widetilde{\beta}_2 \end{array} \right]'$ que define o equilíbrio de longo prazo x_{1t} e x_{2t}:

$$\left[\begin{array}{cc} x_{1t} & x_{2t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \widetilde{\beta}_1 \\ \widetilde{\beta}_2 \end{array} \right] = \widetilde{\beta}_1 x_{1t} + \widetilde{\beta}_2 x_{2t} = 0.$$

O vetor de cointegração não é único e, por isso, pode haver ambigüidades para defini-lo corretamente. Resolve-se esse problema multiplicando ambos os lados dessa equação por $\frac{1}{\widetilde{\beta}_1}$, de forma a "normalizar" o vetor de cointegração:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} x_{1t} & x_{2t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \beta_2 \end{array} \right] &= x_{1t} + \beta_2 x_{2t} = 0, \\ \beta_2 &\equiv \frac{\widetilde{\beta}_2}{\widetilde{\beta}_1}. \end{aligned}$$

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

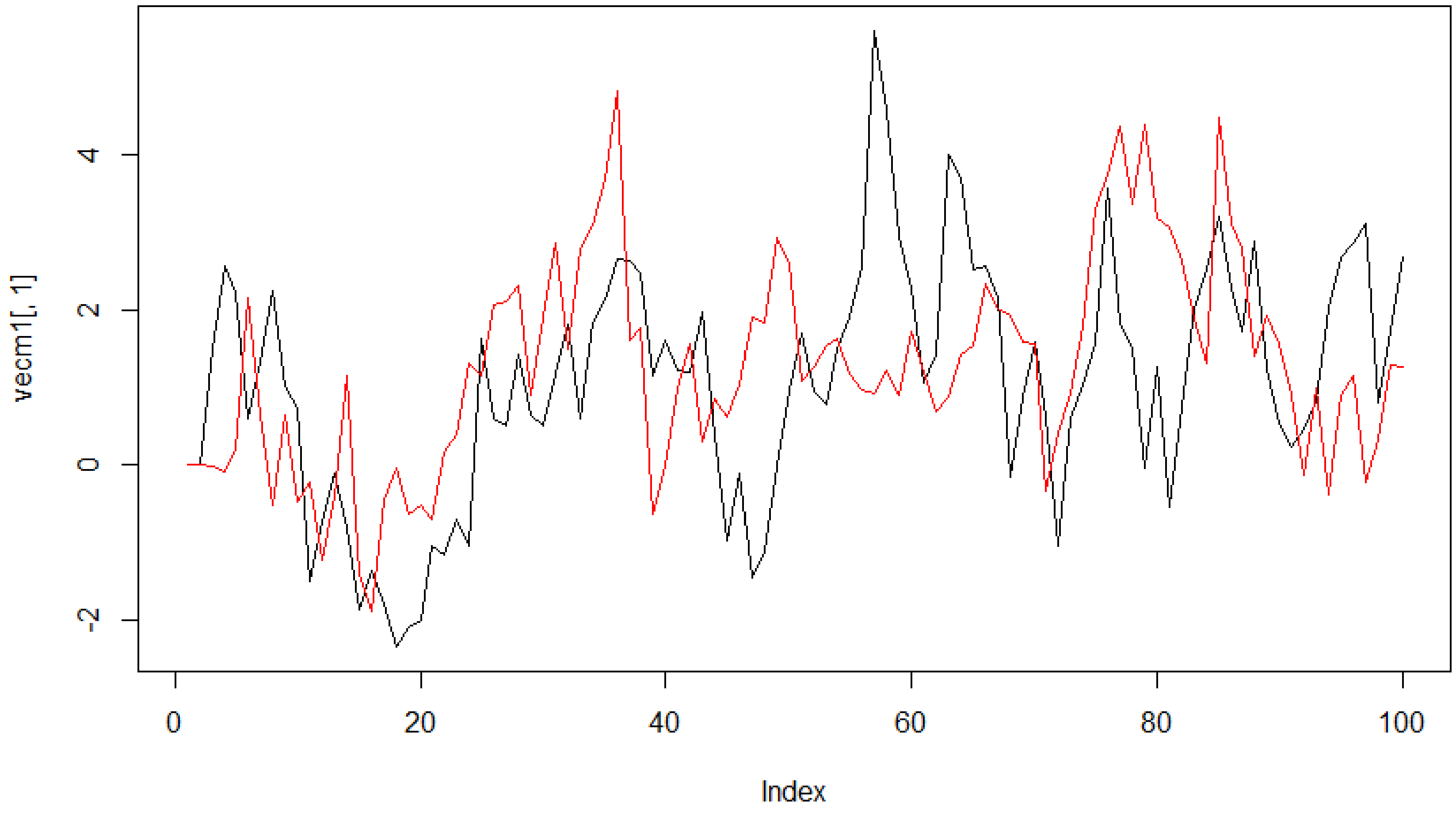
- Requerer o programa para gerar o VECM

```
install.packages("tsDyn")

require(tsDyn)
```

- Gerando um VECM

```
Bvecm <- rbind(c(-0.2, 0,0), c(0.2, 0,0))

startVal <- matrix(0, nrow=2, ncol=1)

set.seed(222);vecm1 <- VECM.sim(B=Bvecm, beta=1,n=100, lag=1,include="none",starting=startVal)

plot(vecm1[,1],type="l")

points(vecm1[,2],type="l",col="red")
```

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM



VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Preocupações da teoria de cointegração: testar os resíduos u_t, para constatar tratar-se de uma variável estacionária. Dado que u_t é estacionário, usar essa informação para ajustar melhor o modelo VAR.
- Quando se utiliza a informação decorrente desse fato, tem-se o modelo VECM, em que se incorpora o erro de equilíbrio.
- Como testar se os resíduos são, de fato, estacionários? Teste de raiz unitária.

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Se duas variáveis têm ordens de integração diferentes, qualquer combinação linear entre elas resultará numa variável cuja ordem de integração será a de maior ordem. Em outras palavras, a ordem de integração da variável de maior ordem domina a da variável de menor ordem. Esse fato sugere a necessidade de as variáveis serem de mesma ordem para haver cointegração.
- Contudo, num modelo em que o número de variáveis endógenas é maior do que 2, nem todas as variáveis precisam ter a mesma ordem de integração para existir cointegração.

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Requerer o programa para testar raiz unitária

```
install.packages("fUnitRoots")

require(fUnitRoots)
```

- Diferença entre os valores estimados

```
vecm1_est=lm(vecm1[,1]~vecm1[,2])

vecm1_res=resid(vecm1_est)

plot(vecm1_res,type="l")
```

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Supondo três variáveis, $X_t = [y_t, x_t, z_t]'$, sendo duas integradas de ordem 2, y_t e x_t, e uma integrada de ordem 1, z_t, é possível imaginar que as duas variáveis de maior ordem sejam $C(2,1)$ e a resultante, quando combinada com z_t, seja $C(1,1)$. Isto é, pode-se imaginar um vetor β entre y_t e x_t que gere uma variável, $w_t \sim I(1)$, e, a seguir, um vetor π que combine w_t e z_t, resultando num modelo estacionário. Formalmente, as contas são:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_1} y_t + \frac{\beta_0}{\pi_1} x_t &= w_t \sim I(1); \\ \pi_1 w_t + \pi_2 z_t &= u_t \sim I(0). \end{aligned}$$

Outra forma mais direta de escrever é usando um único vetor $\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta_0 & \pi_2 \end{bmatrix}'$:

$$\begin{bmatrix} y_t & x_t & z_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_0 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = y_t + \beta_0 x_t + \pi_2 z_t = u_t.$$

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- O tipo de combinação descrito determina uma definição mais abrangente do que a de Engle e Granger para cointegração, enunciada por Campbell e Perron (1991):
- Convém dizer finalmente que o modelo pode ser estendido para incluir constante e tendência determinística:

$$u_t = X_t{}'\beta - \mu_1 t - \mu_0.$$

(Campbell e Perron) Os elementos do vetor X_t, $n \times 1$, são ditos cointegrados de ordem (d, b), denotados por $X_t \sim CI\,(d, b)$, se existe pelo menos um vetor β não-nulo tal que

$$u_t = X_t{}'\beta \sim I\,(d - b)\,, b > 0.$$

VETOR DE CORREÇÃO DE ERROS - VECM

- Exemplo teórico

Seja:X~I(2)

Y~I(2)

Z~I(1)

V~I(1)

- Cointegração (correto):

w=lm(X~Y)

u=lm(w~Z) -> u(0) ou lm(X~Y+Z)

Há cointegração entre as séries

- Cointegração (incorreto):

a=lm(X~Z+V) -> a(2)

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Indicado para ser feito sobre uma única equação.
- Num modelo de várias variáveis, é possível existir mais de um vetor de cointegração. Quais equações devem ser testadas constitui um problema econômico a ser resolvido antes do teste.
- Suponha um sistema bivariado nas variáveis y_t e x_t, integradas de ordem 1.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

Engle e Granger propõem uma metodologia a três passos para determinar se essas variáveis são $CI(1,1)$:

- Execute o teste de raiz unitária nas variáveis de interesse e certifique-se de que são $I(1)$;
- Estime a relação de longo prazo e obtenha $\widehat{u}_t$;
- Faça o teste de raiz unitária nos resíduos estimados, usando o procedimento ADF:

$$\Delta\widehat{u}_t = \alpha\widehat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{i+1}\Delta\widehat{u}_{t-i} + v_t.$$

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Usar os valores tabulados em MacKinnon (1991). A tabela depende do número de observações, de variáveis endógenas e existência ou não de constante e tendência linear.
- O coeficiente β é estimado por mínimos quadrados ordinários. Na presença de cointegração, ele será superconsistente.
- Tendência determinística domina a não-estacionaridade de primeira ordem, que domina a estacionaridade, no sentido de convergência assintótica.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Se os resíduos forem estacionários, escreve-se o modelo na forma de correção de erros. Considere que a relação de cointegração:

$$y_t = \mu + \beta z_t + u_t.$$

- Introduzir os erros no modelo VAR implica estimar o seguinte modelo, para o caso $X_t = \begin{bmatrix} y_t & z_t \end{bmatrix}'$:

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha_1 \widehat{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{11,j+1} \Delta y_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{12,j+1} \Delta z_{t-j} + e_{yt}; \\ \Delta z_t &= \alpha_2 \widehat{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{21,j+1} \Delta y_{t-j} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{22,j+1} \Delta z_{t-j} + e_{zt}. \end{aligned}$$

- Não incluir os resíduos de cointegração implica em erro de omissão de variáveis explicativas.
- No caso em que $n > 2$, haverá $r \leq n-1$ vetores de cointegração (se $r = 0$, não existe cointegração entre as variáveis).

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Modelo simulado
- Teste ADF aumentado

plot(vecm1_res,type="l")

adfTest(vecm1_res,lags=3,type = "nc")

```
Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 3
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -4.4746
  P VALUE:
    0.01
```

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Exemplo real
- Atualizando os dados

```
setwd("C:/diretorio/diretorio")

X<-read.csv("base_exerc1.csv",sep=";", dec=".", head=TRUE)
```

- Analisando se há raízes unitárias

```
adfTest(X$pim_sa,lags=3,type = "c") ou adfTest(X$pim_sa,lags=3,type = "ct")

adfTest(X$caged_adm_ind,lags=3,type = "c") ou adfTest(X$caged_adm_ind,lags=3,type = "ct")
```

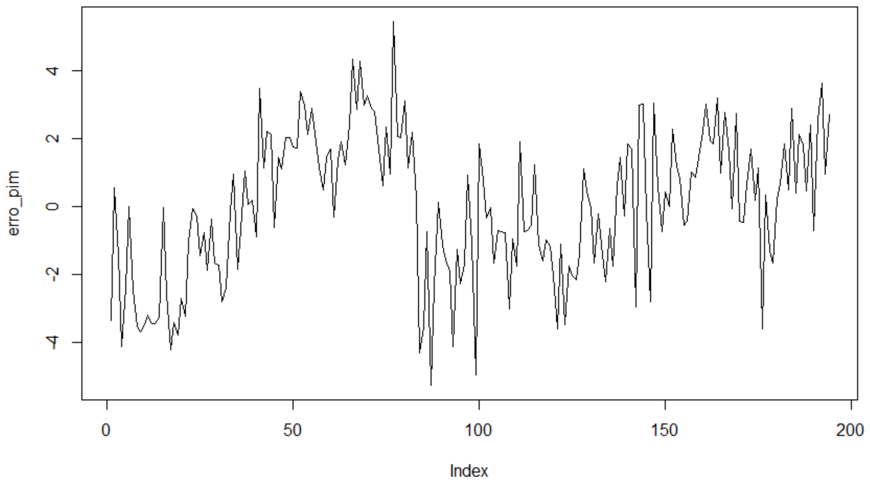
- Observando se são I(1)

```
adfTest(diff(X$pim_sa),lags=3,type = "nc")

adfTest(diff(X$caged_adm_ind),lags=3,type = "nc")
```

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE ENGLE-GRANGER

- Estimando a regressão

```
reg_pim=lm(X$pim_sa~X$caged_adm_ind)

erro_pim=residuals(reg_pim)

acf(erro_pim)

pacf(erro_pim)

plot(erro_pim,type="l")

adfTest(erro_pim,lags=3,type = "nc")
```




```
Title:
 Augmented Dickey-Fuller Test

Test Results:
  PARAMETER:
    Lag Order: 3
  STATISTIC:
    Dickey-Fuller: -2.7826
  P VALUE:
    0.01
```

TESTE DE ENGLE-GRANGER COM VARIÁVEIS I(2)

Considere um exemplo em que as variáveis x_{1t} e x_{2t} integradas de ordem 2 e o vetor $y_t \sim I(1)$:

$$x_{1t} = b_2 x_{2t} + y_t' \omega + u_t.$$

A especificação anterior pode ser desdobrada em outras relações com as mesmas variáveis. Um exemplo seria usar as variáveis de maior integração em sua diferença, conforme a seguinte especificação:

$$x_{1t} = b_2 x_{2t} + y_t \omega + \gamma_2 \Delta x_{2t} + u_t.$$

TESTE DE ENGLE-GRANGER COM VARIÁVEIS I(2)

Sejam x_{1t}, x_{2t} e x_{3t} variáveis $I(2)$, e y_t um vetor de variáveis $I(1)$:

- Estima-se o modelo completo:

$$x_{1t} = \mu + \delta t + b_2 x_{2t} + b_3 x_{3t} + \gamma_2 \Delta x_{2t} + \gamma_3 \Delta x_{3t} + y_t' \omega + u_t.$$

- Procede-se ao teste de raiz unitária nos resíduos estimados:

$$\Delta \widehat{z}_t = \alpha \widehat{z}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{i+1} \Delta \widehat{z}_{t-i} + u_t.$$

A não-rejeição de $H_0 : \alpha = 0$ implica que os resíduos têm raiz unitária e que as variáveis não cointegram. Os valores críticos nesse caso dependem do número de regressores que são $I(2)$, $m_2 = 1, 2$, do número de regressores que são $I(1)$, $m_1 = 0, 1, \ldots, 4$, do número de observações e da forma dos regressores determinísticos. Veja Enders (2009) para os detalhes das tabelas.

TESTE DE ENGLE-GRANGER COM VARIÁVEIS I(2)

- Analisando se há raízes unitárias
  - População

```
adfTest((X$populacao),lags=2,type = "c") ou adfTest((X$populacao),lags=2,type = "ct")

adfTest(diff(X$populacao),lags=2,type = "c") ou adfTest(diff(X$populacao),lags=2,type = "ct")

adfTest(diff(diff(X$populacao)),lags=2,type = "c")
```

  - Base monetária

```
adfTest(X$bm_sa,lags=2,type = "c") ou adfTest(X$bm_sa,lags=2,type = "ct")

adfTest(diff(X$bm_sa),lags=2,type = "c") ou adfTest(diff(X$bm_sa),lags=2,type = "ct")
```

  - Vendas no varejo

```
adfTest(X$varej_sa,lags=2,type = "c") ou adfTest(X$varej_sa,lags=2,type = "ct")

adfTest(diff(X$varej_sa),lags=2,type = "c") ou adfTest(diff(X$varej_sa),lags=2,type = "ct")
```

  - IPCA

```
adfTest(X$ipca_acum,lags=2,type = "c")
```

TESTE DE ENGLE-GRANGER COM VARIÁVEIS I(2)

- Estimação com I(2) e I(1)

```
reg_i2<-lm(X$bm_sa~X$varej_sa+X$populacao)

summary(reg_i2)

erro_i2<-residuals(reg_i2)

adfTest(erro_i2,lags=2,type = "c") ou adfTest(erro_i2,lags=2,type = "nc")
```

- Estimação com I(1) e I(0)

```
reg_i1<-lm(X$bm_sa~X$varej_sa+X$ipca_indx)

summary(reg_i1)

erro_i1=residuals(reg_i1)

adfTest(erro_i1,lags=2,type = "nc")
```

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

- O VAR com variáveis não estacionárias, mas diferenciadas, omite variáveis relevantes. O VECM corrige esse problema:

$$
\begin{aligned}
&X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_p X_{t-p} + e_t \rightarrow \\
&\left[I - \left(\Phi_1 L + \Phi_2 L^2 + \cdots + \Phi_p L^p\right)\right] X_t = e_t \implies \\
&\Phi\left(L\right) X_t = e_t .
\end{aligned}
$$

Quando $L = I$, então:

$$\Phi\left(I\right) = \left[I - \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_p\right)\right] \equiv -\Phi$$

O polinômio característico de $\Phi\left(L\right)$ é dado por:

$$\Phi\left(Z\right) = I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i Z^i,$$

em que Z é uma matriz diagonal com n elementos.

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

- $|\Phi(I)| = 0 \iff posto\,(\Phi) < n$, ou seja, o processo tem uma raiz unitária, de forma que $\Phi(Z)$ pode ser fatorada de tal maneira que:

$$\Phi(Z) = (I - Z)(I - \lambda_1 Z)(I - \lambda_2 Z) \cdots (I - \lambda_{p-1} Z).$$

- O teorema de Granger separa a matriz de cointegração da matriz de ajustamento:

(Granger) *Se* $|\Phi(Z)| = 0$ *implica que* $Z \geq I$ *e* $0 < posto\,(\Phi) = r < n$ *, então existem as matrizes* α *e* β *de dimensão* $n \times r$ *tal que:* $\Phi = \alpha\beta'$.

- β é chamada de matriz de cointegração e α, de matriz de ajustamento.
- O modelo vetor de correção de erros é obtido por manipulações algébricas da equação $\Phi(L)\,X_t = e_t$.

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

Seja:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \Phi_3 X_{t-3} + e_t.$$

A essa equação, some e subtraia $\Phi_3 X_{t-2}$:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \Phi_3 X_{t-2} - \Phi_3 X_{t-2} + \Phi_3 X_{t-3} + e_t = \\ &= \Phi_1 X_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3) X_{t-2} - \Phi_3 \Delta X_{t-2} + e_t. \end{aligned}$$

Ao resultado anterior, some e subtraia $(\Phi_2 + \Phi_3) X_{t-1}$:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_1 X_{t-1} + (\Phi_2 + \Phi_3) X_{t-1} - (\Phi_2 + \Phi_3) X_{t-1} + \\ &\quad + (\Phi_2 + \Phi_3) X_{t-2} - \Phi_3 \Delta X_{t-2} + e_t \\ &= (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) X_{t-1} - (\Phi_2 + \Phi_3) \Delta X_{t-1} - \Phi_3 \Delta X_{t-2} + e_t. \end{aligned}$$

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

Finalmente, subtraia X_{t-1} de ambos os lados para obter a versão do VAR na forma VECM:

$$
\begin{aligned}
X_t - X_{t-1} &= -X_{t-1} + (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) X_{t-1} \\
&\quad - (\Phi_2 + \Phi_3) \Delta X_{t-1} - \Phi_3 \Delta X_{t-2} + e_t \\
\Delta X_t &= -[I - (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)] X_{t-1} \\
&\quad - (\Phi_2 + \Phi_3) \Delta X_{t-1} - \Phi_3 \Delta X_{t-2} + e_t \\
&= \Phi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{2} \Lambda_i \Delta X_{t-i} + e_t,
\end{aligned}
$$

em que $\Lambda_i = -\sum_{j=1+i}^{3} \Phi_j, i = 1, 2.$

O caso geral é derivado de forma semelhante e direta a partir do que foi feito anteriormente.

$$\Delta X_t = \Phi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Lambda_i \Delta X_{t-i} + e_t,$$

em que $\Lambda_i = -\sum_{j=1+i}^{p} \Phi_j, i = 1, 2, \ldots, p-1.$

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

- Se há raiz unitária, $\Phi(I) = 0$, de modo que $\Phi = \alpha\beta'$. Pode-se dizer que β é a matriz que tem r vetores de cointegração e α é a matriz de ajustamento, com r vetores de ajustamento.
- O modelo de correção de erros explica ΔX_t por dois componentes: os fatores de curto prazo, $\sum_{i=1}^{p-1} \Lambda_i \Delta X_{t-i}$, e a relação de longo prazo dada entre as coordenadas do vetor de variáveis endógenas, ΦX_{t-1}.
- Sempre é possível associar ao VAR a correção de erros na presença de cointegração? Haveria algum caso em que isso não seria possível?

(Teorema da representação de Granger) *Se $X_t \sim CI(1,1)$, X_t tem representação em forma de VECM.*

MODELO DE CORREÇÃO DE ERROS

- Estimação do modelo de correção de erros

```
dados=cbind(log(X$bm_sa),log(X$ipca_indx),log(X$varej_sa))

colnames(dados)=c("base_m","ipca","varejo")

rank.select(dados,lag.max = 10)
```

- Modelo com 1 lag

```
mod_vecm_g <- VECM(dados, lag=1, estim="2OLS")

mod_vecm_g$model.specific
```

- Modelo com 1 lag e constante

```
mod_vecm2 <- VECM(dados, lag=1, estim="2OLS",LRinclude ="const")

mod_vecm2$model.specific
```

Faz sentido econômico adicionar a constante no vetor de longo prazo?

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Johansen propõe um teste para definir o posto da matriz Φ e, assim, estimar os vetores de cointegração contidos na matriz β.
- A metodologia permite a estimação do VECM simultaneamente aos vetores de cointegração.
- Mesmo definindo o posto de Φ, pode não ser possível identificar α e β. Por isso, propõe-se uma normalização aos vetores de cointegração, de forma a restringir as possibilidades que essas matrizes podem assumir.
- A matrizes α e β não são identificáveis, pois qualquer matriz F não-singular resulta: $\Phi = \alpha F \left(F^{-1}\right) \beta'$, em que F é uma matriz $r \times r$. Para a normalização, a matriz F será tal que representa o inverso do menor principal de β de dimensão $r \times r$. Isto é, a matriz F é utilizada para normalizar os vetores de cointegração.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

Suponha o sistema de equações não estacionárias

$$\begin{bmatrix} 1 & -b & -c \\ -d & 1 & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}.$$

Aplicando a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -b \\ -d & 1 \end{bmatrix}$ sobre essa matriz, pode-se normalizá-la.

$$\begin{bmatrix} 1 & -b \\ -d & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-bd} \begin{bmatrix} 1 & b \\ d & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1-bd} \begin{bmatrix} 1 & b \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b & -c \\ -d & 1 & -e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{bd-1}(c+be) \\ 0 & 1 & \frac{1}{bd-1}(e+cd) \end{bmatrix}.$$

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Para identificar o posto, Johansen propõe dois testes, baseados numa estimação de máxima verossimilhança com restrição.
- Φ é uma matriz $n \times n$, cujo posto é $r < n$, se houver cointegração. Se o posto dessa matriz for n, então as variáveis endógenas são todas estacionárias. Se o posto da matriz for nulo, não existe cointegração.
- O determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores e o posto de Φ está entre 0 e n, logo Φ terá r autovalores diferentes de zero e $n - r$ autovalores iguais a zero. O problema, portanto, é encontrar esses autovalores de:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \cdots + \Phi_p X_{t-p} + \delta' d_t + e_t,$$

em que
$d_t = [1, t]'$ é um vetor com variáveis determinísticas e que poderia incluir também *dummies* sazonais ou outras variáveis determinísticas;
δ é uma matriz de coeficientes, cuja dimensão é compatível com d_t, nesse caso com dimensão $2 \times n$.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Reescrevendo o modelo anterior na forma VECM, obtém-se:

$$\Delta X_t = \Phi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \Lambda_i \Delta X_{t-i} + \delta' d_t + e_t .$$

- Maximizando essa especificação com restrições sobre a matriz de covariância é possível obter os autovalores da matriz Φ.
- Esses autovalores podem ser ordenados, sem perda de generalidade, do maior para o menor: $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, cada um deles correspondente a um determinado autovetor que será associado aos vetores de cointegração contidos em β.
- Há dois testes que podem ser empreendidos, ambos designados por Johansen.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Hipótese nula: existência de r^* vetores de cointegração. Hipótese alternativa: $r > r^*$ vetores. Isto é: $H_0 : r = r^* \times H_1 : r > r^*$.

A estatística do teste é dada por:

$$\lambda_{tr}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{n} \ln\left(1 - \widehat{\lambda}_i\right).$$

- Os autovalores são normalizados tal que serão menores do que 1.
- O posto de Φ é igual ao número de suas raízes características diferentes de zero. Se não existe cointegração, os autovalores obtidos serão próximos a zero e $\ln(1 - \lambda_i) \to 0$. Assim, a estatística do traço resulta em valores pequenos, de tal modo que não se pode rejeitar a nula. Se, por outro lado, λ_i é significantemente diferente de zero, então $\ln(1 - \lambda_i)$ será negativo. A estatística terá um valor alto, e a nula será rejeitada em favor da alternativa.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN: Máximo Autovalor

- Resultados mais robustos que o anterior, mas também com distribuição não convencional:

$$H_0 : r = r^* \times H_1 : r = r^* + 1.$$

A estatística do teste é dada por:

$$LR(r) = -T \ln \left(1 - \widehat{\lambda}_{r+1}\right).$$

- Como o teste anterior, é um teste crescente. Rejeitar H_0 significa que há mais um vetor de cointegração. Não rejeitar H_0 significa que há r^* vetores de cointegração.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Sem intercepto e tendência no vetor de cointegração e nível de X_t:

$$\Phi X_{t-1} + \delta' d_t = \alpha\beta' X_{t-1}.$$

- Intercepto apenas no vetor de cointegração:

$$\Phi X_{t-1} + \delta' d_t = \alpha\left(\beta' X_{t-1} + \mu_0\right),$$

- Intercepto no vetor de cointegração e tendência linear no nível de X_t:

$$\Phi X_{t-1} + \delta' d_t = \alpha\left(\beta' X_{t-1} + \mu_0\right) + \delta_0,$$

- Intercepto no vetor de cointegração e tendência linear no vetor de cointegração e no nível:

$$\Phi X_{t-1} + \delta' d_t = \alpha\left[\beta' X_{t-1} + \mu_0 + \mu_1 (t-1)\right] + \delta_0,$$

- Intercepto e tendência linear no vetor de cointegração e tendência quadrática no nível:

$$\Phi X_{t-1} + \delta' d_t = \alpha\left[\beta' X_{t-1} + \mu_0 + \mu_1 (t-1)\right] + \delta_0 + \delta_1 t,$$

em que μ_0 e μ_1 são vetores $r \times 1$, δ_0 e δ_1 são vetores $n \times 1$.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

Especificando o modelo em sua formulação completa, tem-se, portanto:

$$\Delta X_t = \alpha \left\{ \beta' \left[X_{t-1} + \mu_0 + \mu_1 (t-1) \right] \right\} + (\delta_0 + \delta_1 t) + \sum_{i=1}^{p-1} \Lambda_i \Delta X_{t-i} + e_t .$$

Com essa especificação, os seguintes modelos são possíveis:

- Sem termos determinísticos: $\mu_0 = \mu_1 = \delta_0 = \delta_1 = \mathbf{0}$;
- Constante dentro do vetor de cointegração: $\mu_0 \neq \mathbf{0}$, $\mu_1 = \delta_0 = \delta_1 = \mathbf{0}$;
- Constante dentro e fora do vetor de cointegração: $\mu_0, \delta_0 \neq \mathbf{0}$, $\mu_1 = \delta_1 = \mathbf{0}$;
- Constante dentro e fora do vetor de cointegração e tendência dentro do vetor: $\delta_0, \mu_0, \mu_1 \neq \mathbf{0}$, $\delta_1 = \mathbf{0}$;
- Constante dentro e fora do vetor de cointegração e tendência dentro e fora do vetor: δ_0, δ_1, $\mu_0, \mu_1 \neq \mathbf{0}$.

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Estimação do modelo de correção de erros - Johansen
  - Modelo com 1 lag – vetor de longo prazo está errado

```
mod_vecm <- VECM(dados, lag=1, estim="ML")

mod_vecm$model.specific
```

  - Modelo com 2 lag – melhor especificação

```
mod_vecm <- VECM(dados, lag=2, estim="ML")

mod_vecm$model.specific
```

  - Modelo com 1 lag e constante

```
mod_vecm2 <- VECM(dados, lag=1, estim="ML",LRinclude ="const")

mod_vecm2$model.specific
```

TESTE DE COINTEGRAÇÃO DE JOHANSEN

- Testes de Johansen
  - Traço da matriz

```
rank.test(mod_vecm,type = "trace")

rank.test(mod_vecm,type = "trace",r_null=1)

rank.test(mod_vecm,type = "trace",r_null=2)
```

  - Autovalor

```
rank.test(mod_vecm,type = "eigen")

rank.test(mod_vecm,type = "eigen",r_null=1)

rank.test(mod_vecm,type = "eigen",r_null=2)
```

TESTE DE HIPÓTESES

- Quando os coeficientes da matriz α são zeros, a variável explicada é dita **fracamente exógena**. Em um sistema cointegrado, $\{y_t\}$ não-Granger-causa $\{x_t\}$ se os valores defasados Δy_{t-i} não explicam Δx_t **e** se x_t não responde aos desvios de equilíbrio de longo prazo. Portanto, x_t é **fracamente exógena**.
- Um interessante do procedimento de Johansen é testar formas restritas do vetor de cointegração. Assim, estime os modelos restrito e não restrito. Obtenha os autovalores de cada modelo, respectivamente ordenados como $\widehat{\lambda}_1 > \widehat{\lambda}_2 > \cdots > \widehat{\lambda}_n$ e $\widehat{\lambda}_1^* > \widehat{\lambda}_2^* > \cdots > \widehat{\lambda}_n^*$. A estatística do teste será dada por:

$$2J = -T \sum_{i=r+1}^{n} \left[\ln\left(1 - \widehat{\lambda}_i^*\right) - \ln\left(1 - \widehat{\lambda}_i\right) \right] \xrightarrow{d} \chi^2_{n-r}.$$

- Os autovalores de cada regressão devem ser próximos se a restrição imposta for verdadeira. Baixos valores de J implicam a rejeição da hipótese nula representada pela imposição de restrições sobre as matrizes α e β.

TESTE DE HIPÓTESES

- Selic Meta x Selic Efetiva
  - Observamos que a taxa meta Granger causa a taxa efetiva
- Exercício para ver se a Meta é exógena
  - Z<-read.csv("exerc_selic.csv",sep=";", dec=".", head=TRUE)
  - dados_m=cbind((Z$meta),(Z$efetiva))
  - colnames(dados_m)=c("meta","efetiva")
  - rank.select(dados_m,lag.max = 30)
  - modm_vecm <- VECM(dados_m, lag=5, estim="ML")
  - modm_vecm$model.specific
  - modm_vecm <- VECM(dados_m, lag=22, estim="ML")
  - modm_vecm$model.specific

Função resposta ao impulso

- A estimação da função resposta ao impulso é semelhante ao realizado no VAR
- Usando o modelo de Granger

```
irf_g=irf(mod_vecm_g,impulse=c("varejo","ipca"),response="base_m",boot=TRUE,ci=0.95)

plot(irf_g)
```

- Usando o modelo de Johansen

```
irf_j=irf(mod_vecm,impulse=c("varejo","ipca"),response="base_m",boot=TRUE,ci=0.95)

plot(irf_j)
```

Decomposição da variância e projeção

- Estimando o modelo de decomposição da variância – Johansen

```
dec_j=fevd(mod_vecm)

plot(dec_j)
```

- Projetando n passos a frente

```
pred_10 <- predict(mod_vecm, n.ahead = 10)

pred_10
```

- Projetando o modelo com janela móvel

```
pred_roll <- predict_rolling(mod_vecm, nroll=10)

pred_roll$pred
```

Exercício

- O que determina o dólar?
  - Fazer um VECM com algumas das variáveis no arquivo exerc_aula7.csv que possam explicar a taxa de câmbio brasileira (escolher pelo menos 2)
  - Identificar se são integradas e se é possível fazer a conintegração
  - Estimar o modelo de cointregração (Granger ou Johansen)
  - Verificar se o resultado faz sentido econômico
  - Estimar a decomposição da variância e a função resposta ao impulso
  - Projetar!