Macroeconometria – Séries de tempo

FAUSTO JOSÉ ARAÚJO VIEIRA

Aula 6

17 de abril a 22 de maio de 2018

RESUMO – VETOR AUTORREGRESSIVO (AULA ANTERIOR)

Introdução

- O uso de modelos univariados é limitado para expressar modelos econômicos.
- O vetor autorregressivo permite que se expressem modelos econômicos completos e se estimem os parâmetros desse modelo.
- Os modelos em VAR definem restrições entre as equações do modelo. Estudar essas restrições e usá-las para identificar os parâmetros estruturais do VAR constitui um objetivo fundamental da metodologia.

VAR(p)

- Diferentemente dos modelos univariados, o VAR busca responder qual a trajetória da série, dado um **choque estrutural**.
- Por trajetória, deseja-se conhecer o tempo que um choque afeta uma série, se ela muda de patamar ou não, para que patamar vai, entre outras informações.

RESUMO DA AULA

SUMÁRIO DESTA AULA

- Função resposta ao impulso
- Intervalo de confiança
- Decomposição de variância
- Teste de causalidade
- VAR estrutural
  - Forma estrutural x Forma reduzida
- Decomposição Blanchard e Quah

VETOR AUTORREGRESSIVO (VAR) - CONTINUAÇÃO

Forma estrutural x Forma reduzida (lembrando)

Em matrizes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv B_0} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv B_1} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \varepsilon_t} \Longrightarrow$$

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\varepsilon_t.$$

A forma reduzida desse modelo simplificado é:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t; \qquad (2) \\ \Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0; \\ \Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1; \\ Ae_t &\equiv B\varepsilon_t. \end{aligned}$$

Função resposta ao impulso

- O modelo VAR não permite identificar todos os parâmetros da forma estrutural, a menos que se imponham restrições adicionais.
- Para ver isso, observe que no sistema restrito dado pela equação (2) conseguem-se estimar os seis parâmetros na equação da média, $Var\,(e_1)$, $Var\,(e_2)$ e $Cov\,(e_1, e_2)$. No sistema primitivo há dez parâmetros a calcular: além dos oito coeficientes estruturais, há ainda as variâncias de cada um dos choques.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
AX_t &= B_0 + \sum_{i=1}^{p} B_i X_{t-i} + B\varepsilon_t, && (1)\\
X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t; && (2)
\end{aligned}
}
$$

Função resposta ao impulso

- Sims (1980) sugere um sistema recursivo para identificar o modelo. Trata-se de impor que alguns coeficientes sejam iguais a zero. Geralmente, usam-se argumentos econômicos para definir quais deles são iguais a zero.
- Sims impõe que o efeito *feedback* seja limitado. No caso mais simples, de um modelo bivariado, impor-se-ia, por exemplo, que $a_{12} = 0$:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_{10} + b_{11} y_{t-1} + b_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt}; \\
z_t &= b_{20} - a_{21} y_t + b_{21} y_{t-1} + b_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt}.
\end{aligned}
$$

Função resposta ao impulso - lembrar!

Em matrizes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}}_{\equiv X_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}}_{\equiv B_0} +$$

= 0

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{\equiv B_1} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\equiv B} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{\equiv \varepsilon_t} \Longrightarrow$$

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\varepsilon_t.$$

A forma reduzida desse modelo simplificado é:

$$\begin{aligned} X_t &= \Phi_0 + \Phi_1 X_{t-1} + e_t; \\ \Phi_0 &\equiv A^{-1} B_0; \\ \Phi_1 &\equiv A^{-1} B_1; \\ Ae_t &\equiv B\varepsilon_t. \end{aligned} \tag{2}$$

Função resposta ao impulso

Essa restrição é importante porque torna os parâmetros estruturais restantes identificáveis, conforme se observa no exemplo bivariado:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sabendo-se ainda que $a_{12} = 0$, então os erros reduzidos ficam

$$
\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_y \varepsilon_{yt} \\ \sigma_z \varepsilon_{zt} - a_{21} \sigma_y \varepsilon_{yt} \end{bmatrix},
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
var\left(e_1\right) &= \sigma_y^2; \\
cov\left(e_1, e_2\right) &= -a_{21}\sigma_y^2; \text{ e } var\left(e_2\right) = \sigma_z^2 + a_{21}^2 \sigma_y^2.
\end{aligned}
$$

Função resposta ao impulso

- Essas três equações combinam-se com as demais estimativas para identificar o modelo:

$$\begin{aligned} \phi_{10} &= b_{10}; & \phi_{20} &= b_{20} - b_{10}a_{21}; \\ \phi_{11} &= b_{11}; & \phi_{12} &= b_{12}; \\ \phi_{21} &= -a_{21}b_{11} + b_{21}; & \phi_{22} &= -a_{21}b_{12} + b_{22}. \end{aligned}$$

- A metodologia proposta por Sims pode ser generalizada para um vetor com n variáveis endógenas. Trata-se de uma maneira triangular de decompor os resíduos, chamada de decomposição de **Choleski**.
- No caso de n variáveis endógenas, a matriz de covariância é de dimensão $n \times n$. As condições de identificação requerem a imposição de $\frac{n^2-n}{2}$ restrições. O problema dessa imposição é definir a ordenação das variáveis, que é arbitrária, ainda que atribuída a razões econômicas. A ordenação das variáveis define a forma das restrições, de modo que diferentes ordenações geram diferentes restrições.

Função resposta ao impulso

- Se os autovalores da polinomial $\left(I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i L^i\right)$ estiverem fora do círculo unitário, pode-se escrever um VAR (p) como um vetor de médias móveis infinito VMA (∞):

$$X_t - \overline{X} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i e_{t-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi_1^i}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y \varepsilon_{yt-i} \\ \sigma_z \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix},$$

em que $\overline{X} \equiv (I - \Phi_1)^{-1} \Phi_0$ é a média de longo prazo.

- Seja:

$$\Psi_i = \frac{\Phi_1^i}{1 - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

- Desse modo:

$$\begin{aligned} X_t &= \overline{X} + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i B \varepsilon_{t-i} = \\ &= \overline{X} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \psi_{i,11} & \psi_{i,12} \\ \psi_{i,21} & \psi_{i,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_y \varepsilon_{yt-i} \\ \sigma_z \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Função resposta ao impulso

- Os elementos da matriz Ψ_i são os multiplicadores de impacto de um choque sobre as variáveis endógenas. Assim, o impacto total de um choque de ε_{yt} sobre y_{t+h} é dado pela soma dos coeficientes $\psi_{i,11}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, h$.

Função resposta ao impulso – Exemplo simulado

Considere o modelo foi simulado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t; \\
x_t &= \delta y_t + \nu_t,
\end{aligned}
$$

em que ε_t e ν_t são ambos ruídos brancos independentes.
Pode-se reescrever esse modelo na forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \nu_t \end{bmatrix}.
$$

Reescrevendo o modelo na forma reduzida, tem-se:

$$
\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ \delta\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{xt} \end{bmatrix}.
$$

VAR – exemplo simulado

- Carregando pacotes

```
require(tsDyn)
require(vars)
```

- Gerando as variáveis

```
B1<-matrix(c(0.4, 0.4, 0.1, 0.6), 2)
set.seed(20);var_xy<-VAR.sim(B=B1,n=200,include="none")
```

- Estimando o VAR

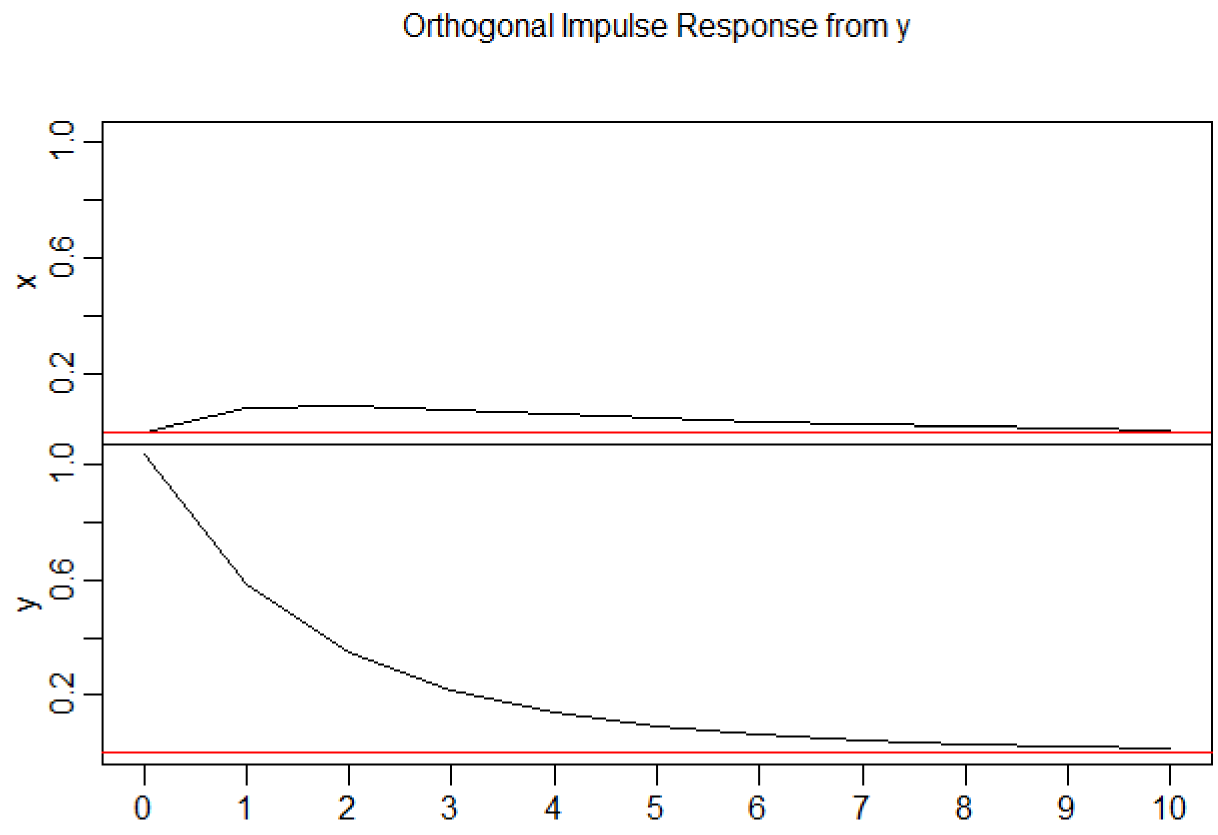
```
colnames(var_xy)=c("x","y")
varxy_est<-VAR(var_xy,p = 1,type="none")
```

Função resposta ao impulso – Exemplo simulado

- Estimando o efeito de um choque de “y”

```
a<-irf(varxy_est, impulse = "y", response = c("x", "y"), boot = FALSE)

plot(a)
```



Intervalo de confiança

- A função resposta ao impulso é calculada mediante coeficientes estimados. Logo, é claro que há um intervalo de confiança a ser considerado nessas estimativas. Esse intervalo pode ser calculado de forma analítica ou por métodos de experimentos de Monte Carlo.
- O método analítico torna-se bem complicado quando se imagina um problema multivariado, em razão das covariâncias cruzadas.

Intervalo de confiança

- Estime o modelo multivariado e armazene os resíduos estimados, $\{\widehat{e}_t\}$;
- Sorteie os resíduos armazenados com reposição e simule uma nova série usando as matrizes Φ estimadas no passo anterior. Por exemplo, no caso de um $VAR\ (1)$:

$$\widehat{X}_t = \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_1 \widehat{X}_{t-1} + \widehat{e}_t;$$

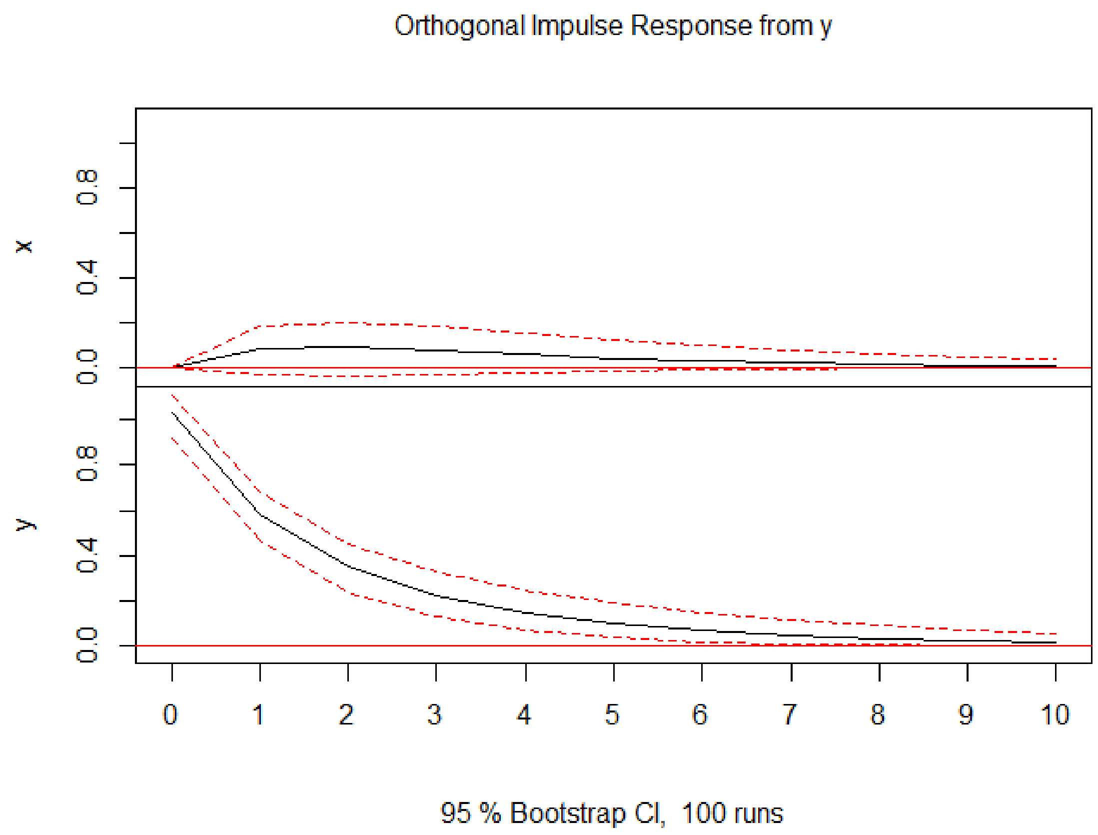
- Reestime o modelo e a nova função resposta ao impulso;
- Repita o processo milhares de vezes;
- Para construir um intervalo com 95% de confiança, exclua $2,5\%$ das menores e maiores respostas.

Função resposta ao impulso

- Estimando o efeito de um choque da taxa de juros

```
a_interv<-irf(varxy_est, impulse = "y", response = c("x", "y"), boot = TRUE,ci=0.95)

plot(a_interv)
```

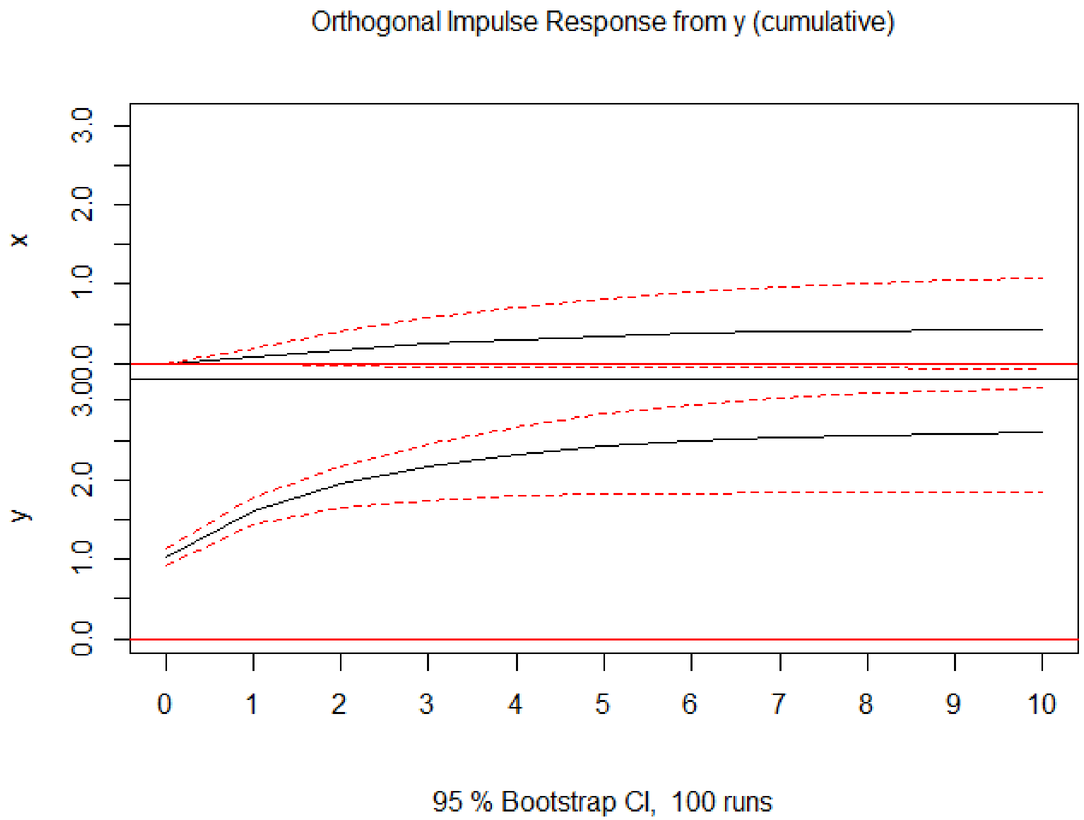


Função resposta ao impulso – acumulado

- Estimando o efeito de um choque da taxa de juros

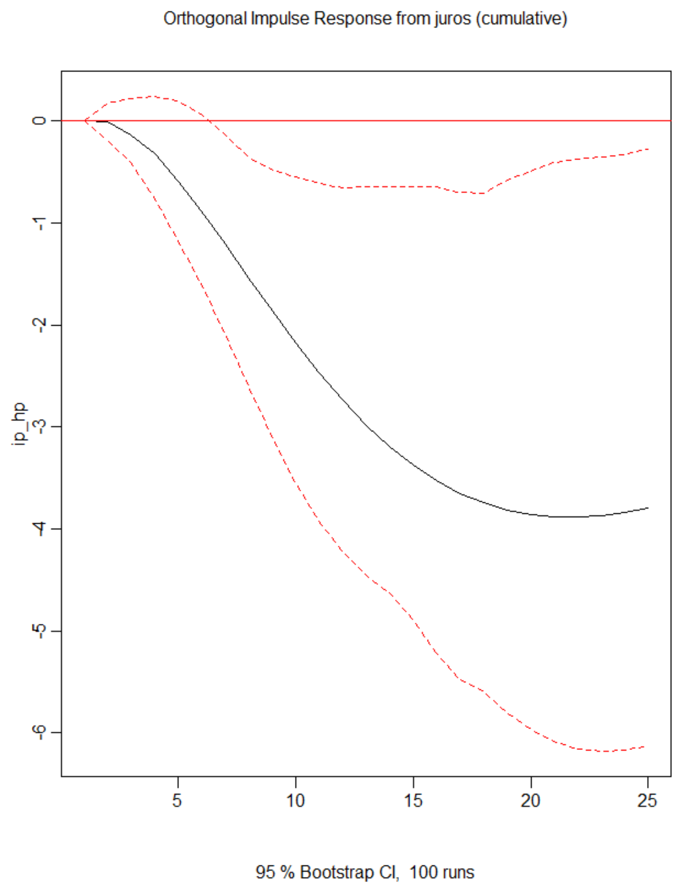
```
a_cum<-irf(varxy_est, impulse = "y", response = c("x", "y"), boot = TRUE, ci=0.95, cumulative=TRUE)

plot(a_cum)
```



Função resposta ao impulso – VAR BCB trim

- Modelo trimestral estimado na aula anterior - exemplo
- Estimando o efeito de um choque da taxa de juros na indústria



Transformando um VAR(p) em VMA(∞)

- Análoga aos processos univariados.
- Quando se conhece o processo gerador de dados, a previsão h passos à frente é dada por:

$$E\left(X_{t+h}|I_t\right) \equiv X_{t+h|t} = \Phi_1 X_{t+h-1|t} + \Phi_2 X_{t+h-2|t} + \cdots + \Phi_p X_{t+h-p|t},$$

em que $X_{t+j|t} = X_{t+j}$ para $j \leq 0$.

- Transformando X_t num modelo de médias móveis infinito:

$$X_{t+h} = \left(I - \sum_{j=1}^{p} \Phi_j L^j\right)^{-1} e_{t+h} = e_{t+h} + \Psi_1 e_{t+h-1} + \Psi_p e_{t+h-2} + \cdots$$

- Conseqüentemente, a previsão correspondente é dada por:

$$X_{t+h|t} = \sum_{j=h}^{\infty} \Psi_j e_{t+h-j}.$$

Decomposição da variância

Considere o exemplo das seções anteriores, VAR (1) com duas variáveis endógenas, y e z:

$$X_{t+h} = \overline{X} + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t+h-i}.$$

Calcule o erro de previsão:

$$X_{t+h} - E_t\left(X_{t+h}\right) = \sum_{i=0}^{h-1} \Psi_i \varepsilon_{t+h-i}.$$

Esmiuçando apenas y_{t+h}:

$$\begin{aligned} y_{t+h} - E_t\left(y_{t+h}\right) &= \psi_{0,11}\varepsilon_{yt+h} + \psi_{1,11}\varepsilon_{yt+h-1} + \cdots + \psi_{h-1,11}\varepsilon_{yt+1} + \\ & \quad + \psi_{0,12}\varepsilon_{zt+h} + \psi_{1,12}\varepsilon_{zt+h-1} + \cdots + \psi_{h-1,12}\varepsilon_{zt+1}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(h) &= \sigma_y^2\left(\psi_{0,11}^2 + \psi_{1,11}^2 + \cdots + \psi_{h-1,11}^2\right) + \\ & \quad + \sigma_z^2\left(\psi_{0,12}^2 + \psi_{1,12}^2 + \cdots + \psi_{h-1,12}^2\right). \end{aligned}$$

Decomposição da variância

Agora, pode-se decompor a variância do erro de previsão em seus diversos elementos. Dividindo-se ambos os lados por $\sigma_y^2(h)$:

$$1 = \frac{\sigma_y^2\left(\psi_{0,11}^2 + \psi_{1,11}^2 + \cdots + \psi_{h-1,11}^2\right)}{\sigma_y^2(h)} + \\ + \frac{\sigma_z^2\left(\psi_{0,12}^2 + \psi_{1,12}^2 + \cdots + \psi_{h-1,12}^2\right)}{\sigma_y^2(h)}.$$

Decomposição da variância de $y_{t+h} - E_t(y_{t+h})$

h	$\sigma_y(h)$	$\frac{\sigma_y^2\left(\psi_{0,11}^2+\psi_{1,11}^2+\cdots+\psi_{h-1,11}^2\right)}{\sigma_y^2(h)}$	$\frac{\sigma_z^2\left(\psi_{0,12}^2+\psi_{1,12}^2+\cdots+\psi_{h-1,12}^2\right)}{\sigma_y^2(h)}$
1	0,956	100,00	0,00
2	1,063	94,53	5,47
3	1,116	88,09	11,91
4	1,152	83,24	16,76
5	1,176	80,03	19,97

Decomposição da variância

O mesmo é feito com a variável z_{t+h}:

Decomposição da variância de $z_{t+h} - E_t\left(z_{t+h}\right)$

h	$\sigma_z\left(h\right)$	$\frac{\sigma_y^2\left(\psi_{0,21}^2+\psi_{1,21}^2+\cdots+\psi_{h-1,21}^2\right)}{\sigma_z^2(h)}$	$\frac{\sigma_z^2\left(\psi_{0,22}^2+\psi_{1,22}^2+\cdots+\psi_{h-1,22}^2\right)}{\sigma_z^2(h)}$
1	$1,244$	$32,96$	$67,04$
2	$1,404$	$25,51$	$74,49$
3	$1,462$	$29,04$	$70,96$
4	$1,490$	$27,07$	$72,93$
5	$1,506$	$26,06$	$73,94$

VAR simulado – decomposição da variância

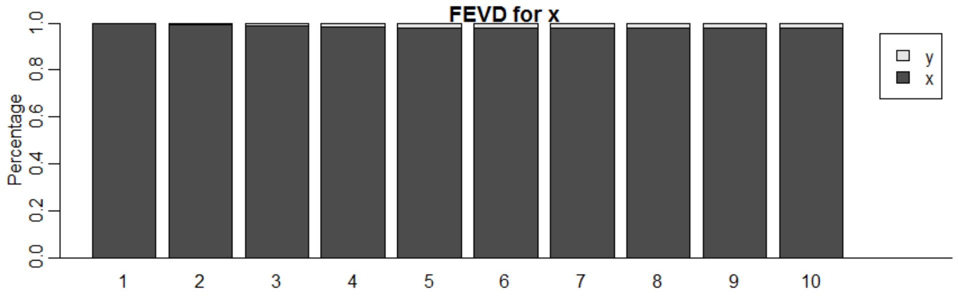
- Estimando a decomposição da variância com 10 passos à frente:

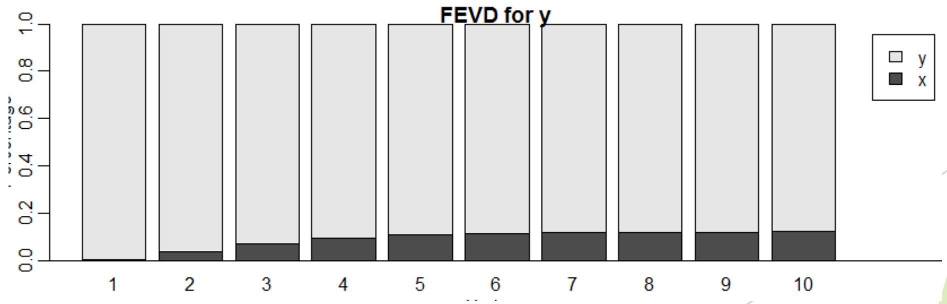
```
a<-fevd(varxy_est,n.ahead = 10)
```

```
> a$x
              x           y
 [1,] 1.0000000 0.000000000
 [2,] 0.9942233 0.005776721
 [3,] 0.9882005 0.011799481
 [4,] 0.9841054 0.015894558
 [5,] 0.9817490 0.018250959
 [6,] 0.9805001 0.019499901
 [7,] 0.9798668 0.020133233
 [8,] 0.9795535 0.020446509
 [9,] 0.9794007 0.020599271
[10,] 0.9793269 0.020673145
```

```
> a$y
                x         y
 [1,] 0.001376104 0.9986239
 [2,] 0.035219117 0.9647809
 [3,] 0.070797377 0.9292026
 [4,] 0.093985554 0.9060144
 [5,] 0.106942035 0.8930580
 [6,] 0.113699948 0.8863001
 [7,] 0.117099844 0.8829002
 [8,] 0.118775460 0.8812245
 [9,] 0.119591236 0.8804088
[10,] 0.119985478 0.8800145
```

```
plot(a)
```





Teste de causalidade de Granger

- uma variável é capaz de prever outra? em que condições? Em outras palavras, a questão fundamental é saber se o escalar y ajuda a **prever** o escalar z. Se isso não acontece, então diz-se que y **não-Granger-causa** z.
- O teste tem o sentido de previsão, não de causalidade econômica, apesar do nome.
- A forma de responder a essa pergunta é usando um teste F convencional, válido quando os coeficientes de interesse puderem ser escritos de modo a multiplicar variáveis estacionárias.

Teste de causalidade de Granger

- O teste é feito da seguinte maneira:
- Estime $z_t = \phi_{20} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{i,21} y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} \phi_{i,22} z_{t-i} + e_{2t}$;
- Teste se y não-Granger-causa z usando o teste de F, sob:

$$H_0 : \phi_{1,21} = \phi_{2,21} = \cdots = \phi_{p,21} = 0 \times H_1 : \phi_{i,21} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, p,$$

em que a estatística do teste é dada por:

$$S_1 = \frac{\frac{\left(e_r^2 - e_u^2\right)}{p}}{\frac{e_u^2}{T-2p-1}} \xrightarrow{d} F\left(p, T - 2p - 1\right),$$

em que r representa restrito e u, não restrito. Se $S_1 > F^{5\%}$, rejeita-se a hipótese nula de que y não-Granger-causa z.

- Um teste equivalente é:

$$S_2 = \frac{T\left(e_r^2 - e_u^2\right)}{e_u^2} \xrightarrow{d} \chi_p^2.$$

Rejeita-se a nula se $S_2 > \chi_p^2\,(5\%)$.

Teste de causalidade de Granger

- Teste de causalidade de Granger não é a mesma coisa que teste de exogeneidade. Para que z_t seja exógeno a y_t, é preciso que z_t não seja afetado contemporaneamente por y_t. A forma reduzida do VAR não permite que se faça esse tipo de teste. O teste de causalidade de Granger inclui, pois, valores passados de y_t sobre z_t.
- Pode-se fazer o mesmo teste em contextos de mais variáveis, cujo nome é teste de bloco-exogeneidade. Estima-se o modelo com e sem restrição e utiliza-se o teste F, como visto anteriormente.

Teste de causalidade de Granger

- É importante observar que, em sistemas com $n > 2$, o teste de causalidade é mais complicado de ser feito, e a interpretação necessita de maiores cuidados. O problema que pode ocorrer ao não rejeitar a nula é não perceber a dinâmica mais complicada do modelo em que uma variável, apesar de não causar diretamente outra (por exemplo, y_{2t} não Granger-causa y_{1t}), pode causá-la indiretamente. Isso ocorrerá quando y_{2t} causar y_{3t}, que, por sua vez, causa y_{1t}. O teste de Granger-causalidade não foi desenvolvido para esse tipo de caso.

VAR simulado - estimação

- Estimando o modelo anterior:

```
causality(varxy_est,cause='x')

causality(varxy_est,cause='y')
```

VAR simulado - estimação

- Outro exemplo simulado

```
B2<-matrix(c(0.6, 0.0, 0.3, 0.3), 2)

set.seed(20);var2<-VAR.sim(B=B2,n=500,include="none")

colnames(var2)=c("x","y")

var2_est<-VAR(var2,p = 1,type="none")

coef(var2_est)

causality(var2_est,cause='x')

causality(var2_est,cause='y')
```

Exemplo prático – Taxa SELIC

- Se o Banco Central, de fato, determina a taxa Selic, então alterações na taxa efetiva praticada no mercado financeiro deveriam responder às alterações na meta definida pelo Banco Central.

- Por outro lado, não há razões para acreditar que alterações nas taxas de mercado afetem a meta definida pelo Banco Central.

Exemplo prático – Taxa SELIC

- Atualizando o arquivo:

```
setwd("C:/diretorio/diretorio")
X<-read.csv("exerc_selic.csv",sep=";", dec=".", head=TRUE)
```

- Raíz unitária

```
require(fUnitRoots)
adfTest(X$meta,lags=2,type = "c")
adfTest(X$meta_dif,lags=2,type = "c")
adfTest(X$efetiva,lags=2,type = "c")
adfTest(X$efetiva_dif,lags=2,type = "c")
```

- A taxa Selic meta e efetiva têm raiz unitária:
  - Usa a primeira diferença!

Exemplo prático – Taxa SELIC

- Estimando o VAR

```
var_selic=cbind(X$meta_dif,X$efetiva_dif)
colnames(var_selic)=c("meta","efetiva")
varest_selic<-VAR(var_selic,lag.max = 20,ic="HQ")
varest_selic$p
```

  - Defasagem de 20 - máximo

- Causalidade de Granger

```
causality(varest_selic,cause='meta')
causality(varest_selic,cause='efetiva')
```

Vetor Autorregressivo Estrutural (SVAR)

Lembrando do modelo simulado

Considere o modelo foi simulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_t &= \phi y_{t-1} + \varepsilon_t; \\ x_t &= \delta y_t + \nu_t, \end{aligned}$$

em que ε_t e ν_t são ambos ruídos brancos independentes.
Pode-se reescrever esse modelo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \nu_t \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo o modelo na forma reduzida, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ \delta\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{yt} \\ e_{xt} \end{bmatrix}.$$

VAR estrutural

- Existem outras formas de definir restrições sobre a matriz A, de modo a identificar os parâmetros estruturais. Usa-se a teoria econômica para definir as restrições da matriz A completamente, com risco de sobreidentificação.
- Para entender o procedimento, considere um VAR (1) com n variáveis:

$$AX_t = B_0 + B_1 X_{t-1} + B\varepsilon_t.$$

- Quando se estima a forma reduzida, obtêm-se os resíduos $\widehat{e}_t$, tal que:

Forma estrutural $B\widehat{\varepsilon}_t = A\widehat{e}_t.$ **Forma reduzida**

- O problema é restringir o sistema, de forma a recuperar ε_t conforme a hipótese de que cada resíduo do sistema estrutural é independente um do outro.

VAR estrutural

- Considere a matriz de covariância dos erros da forma reduzida:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \widehat{e}_{it}\widehat{e}_{jt}.$$

- Σ é simétrica $\longrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ elementos diferentes. Elementos da diagonal de A são unitários $\longrightarrow (n^2 - n)$ elementos desconhecidos. Desconhecem-se as n variâncias de ε. Logo, há n^2 elementos desconhecidos e $\frac{n(n+1)}{2}$ conhecidos.

VAR estrutural

- Logo:

$$BB' = Var\left(Ae_t\right) = AVar\left(e_t\right)A'.$$

- Suponha o seguinte sistema de equações, em que se admite conhecer a matriz de covariância de e_t:

VARCOV conhecida

$$\begin{bmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ a_{12} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,5+0,4a_{12} & 0,4+0,6a_{12} \\ 0,5a_{21}+0,4 & 0,4a_{21}+0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{21} \\ a_{12} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,5+0,8a_{12}+0,6a_{12}^2 & 0,5a_{21}+0,4a_{12}a_{21}+0,4+0,6a_{12} \\ 0,5a_{21}+0,4+0,4a_{12}a_{21}+0,6a_{12} & 0,5a_{21}^2+0,8a_{21}+0,6 \end{bmatrix}$$

VARCOV $B\widehat{\varepsilon}_t = A\widehat{e}_t$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Erros estruturais não tem correlação

VAR estrutural – exemplo teórico

- Há três equações independentes com quatro incógnitas $(a_{12}, a_{21}, \sigma^2_{\varepsilon_1}, \sigma^2_{\varepsilon_2})$:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\varepsilon_1} &= 0,5 + 0,8a_{12} + 0,6a_{12}^2; \\ 0 &= 0,5a_{21} + 0,4 + 0,4a_{12}a_{21} + 0,6a_{12}; \\ \sigma^2_{\varepsilon_2} &= 0,5a_{21}^2 + 0,8a_{21} + 0,6. \end{aligned}$$

- Impondo a restrição de Choleski, $a_{12} = 0$, calculam-se:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\varepsilon_1} &= 0,5; \\ 0 &= 0,5a_{21} + 0,4 \Longrightarrow a_{21} = -0,8 \\ \sigma^2_{\varepsilon_2} &= 0,5a_{21}^2 + 0,8a_{21} + 0,6 \Longrightarrow \sigma^2_{\varepsilon_2} = 0,28. \end{aligned}$$

- A função resposta ao impulso. No caso de um VAR (1) bivariado, essa função é:

$$\Psi_i = \Phi_1^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

VAR estrutural – exemplo teórico

Outra restrição: uma inovação em ε_{2t} pode ter um efeito unitário em y_{1t} $\rightarrow a_{12} = 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\varepsilon_1} &= 1,9; \\
a_{21} &= -\frac{10}{9}; \\
\sigma^2_{\varepsilon_2} &= 0,5\frac{100}{81} - 0,8\frac{10}{9} + 0,6 = 0,328.
\end{aligned}$$

VAR estrutural – exemplo simulado

- Criando a matriz para identificação:

```
amat <- diag(2)
diag(amat) <- NA
amat[2, 1] <- NA
amat
```

- Estimação do modelo VAR

```
varxy_est<-VAR(var_xy,p = 1,type="none")
summary(varxy_est)$covres
summary(varxy_est)$corres
```

- Matriz do modelo estrutural

```
SVAR(x = varxy_est, estmethod = "scoring", Amat = amat, max.iter = 100, maxls = 1000, conv.crit = 1.0e-8)
summary(varxy_svar)
```

VARCOV $B\hat{\varepsilon}_t = A\hat{e}_t$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

Erros estruturais não tem correlação

VAR estrutural – exemplo simulado

- Comandos para análise:

```
plot(fevd(varxy_svar,n.ahead=10))

plot(irf(varxy_svar, impulse = "x", response = c("x", "y"), boot =T,ci=0.95))
```

- Resultado identica a estimação do VAR, por que?
  - Decomposição cholesky

VAR estrutural – exemplo do Canadá

- Variáveis em ln:

  e – emprego

  prod – PIB

  rw – salário real da indústria

  U – taxa de desemprego

- Comandos iniciais e criando a matrix:

```
data(Canada)
amat <- diag(4)
diag(amat) <- NA
amat[2, 1] <- NA
amat[4, 1] <- NA
```

VAR estrutural – exemplo do Canadá

- Estimação do modelo VAR

```
var.2c <- VAR(Canada, p = 2, type = "const")
summary(var.2c)
```

- Matriz do modelo estrutural

```
var.Sc<-SVAR(x = var.2c , estmethod = "scoring", Amat = amat, max.iter = 100, maxls = 1000, conv.crit = 1.0e-8)
summary(var.Sc)
```

VAR estrutural – exemplo do Canadá

- Decomposição da variância

  dv_var<-fevd(var.2c,n.ahead=10)

  dv_svar<-fevd(var.Sc,n.ahead=10)

```
> dv_var$U
              e        prod          rw         U
 [1,] 0.4636211 0.003008244 0.002479203 0.5308915
 [2,] 0.7068777 0.008843922 0.003513667 0.2807647
 [3,] 0.7787875 0.037185141 0.020355796 0.1636716
 [4,] 0.7596609 0.079197860 0.046371393 0.1147699
 [5,] 0.6886156 0.128139114 0.076164201 0.1070811
 [6,] 0.5954733 0.178008698 0.103964487 0.1225535
 [7,] 0.5026125 0.224371197 0.125721703 0.1472946
 [8,] 0.4229416 0.264861489 0.140012873 0.1721840
 [9,] 0.3611743 0.298826925 0.147393857 0.1926049
[10,] 0.3168767 0.326625990 0.149367650 0.2071296
```

```
> dv_svar$U
              e       prod          rw         U
 [1,] 0.4636211 0.00000000 0.000000000 0.5363789
 [2,] 0.7018101 0.01272233 0.001039517 0.2844281
 [3,] 0.7645473 0.04833070 0.018740151 0.1683818
 [4,] 0.7340369 0.09755527 0.049279254 0.1191286
 [5,] 0.6507349 0.15238546 0.085685843 0.1111938
 [6,] 0.5482755 0.20544902 0.119856736 0.1264187
 [7,] 0.4514850 0.25193355 0.146244651 0.1503368
 [8,] 0.3729842 0.29013367 0.163169301 0.1737128
 [9,] 0.3156508 0.32044814 0.171635930 0.1922651
[10,] 0.2771297 0.34415317 0.173732009 0.2049851
```

VAR estrutural – exemplo do Canadá

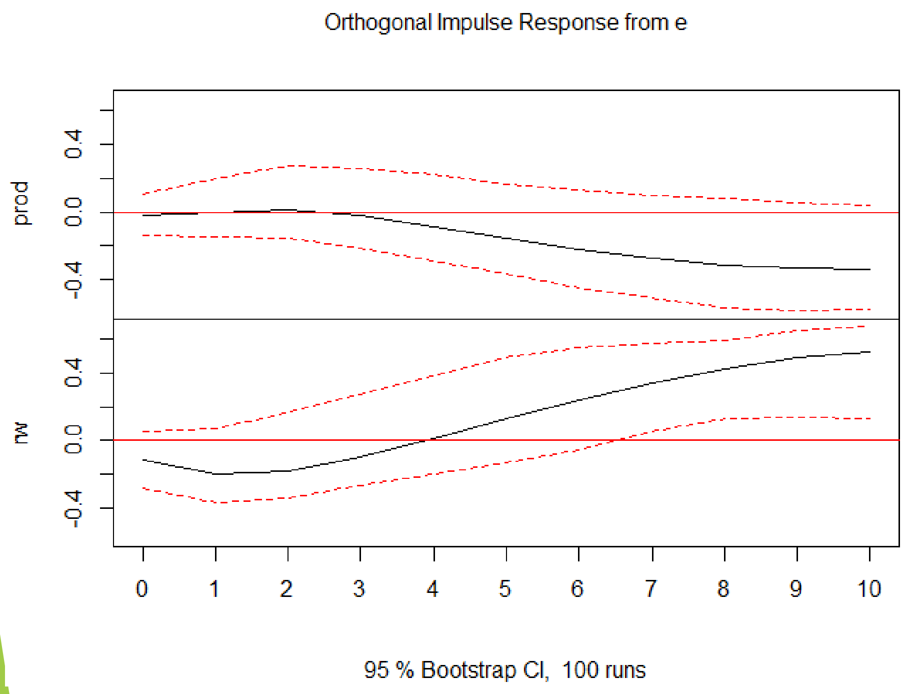
- Função impulso

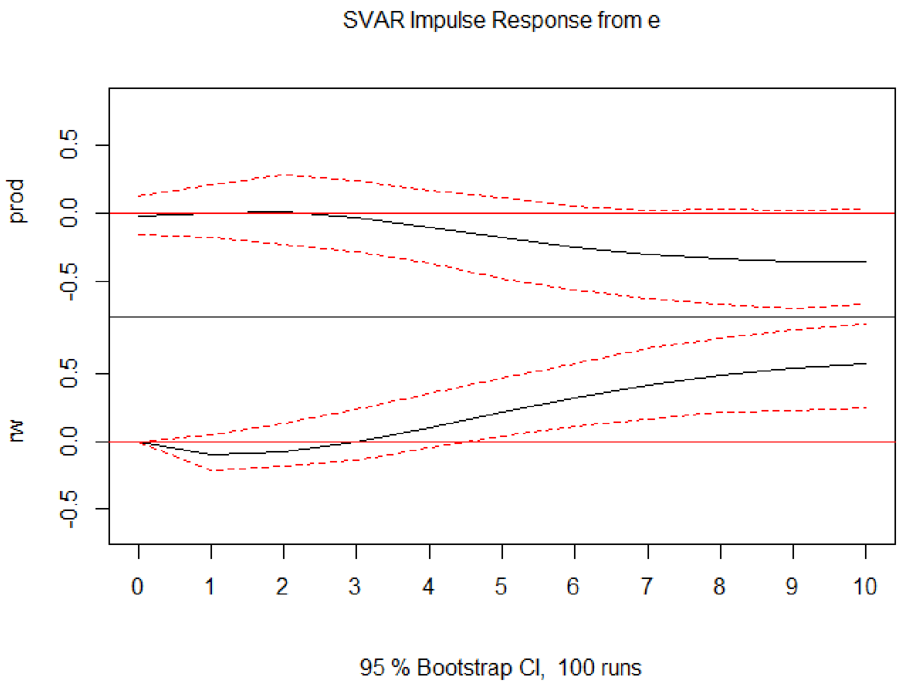
```
imp_var<-irf(var.2c, impulse = "e", response = c("prod", "rw"), boot = TRUE,ci=0.95)

plot(imp_var)

imp_svar<-irf(var.Sc, impulse = "e", response = c("prod", "rw"), boot = TRUE,ci=0.95)

plot(imp_svar)
```





Decomposição de Blanchard e Quah

- Forma de identificação com base em restrições determinadas pela teoria econômica.
- Imposição de restrições a respeito do comportamento de longo prazo de uma variável a partir do choque estrutural em uma outra variável.
- Suponha um vetor $X_t = (\Delta y_t, u_t)'$, em que y_t representa o logaritmo do produto, e u_t, a taxa de desemprego.
- As variáveis respondem a um vetor de choques dado por $\varepsilon_t = (\varepsilon_{t,d}, \varepsilon_{t,s})$.
- O produto é afetado por choques de demanda, e o desemprego, por choques de oferta.
- Os choques entre oferta e demanda não são correlacionados.
- Os choques de demanda têm efeitos temporários; os choques de oferta têm efeitos permanentes.

Decomposição de Blanchard e Quah

Normalizando $B = I$, considere

$$AX_t = \sum_{j=1}^{p} B_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

em que $var(\varepsilon_t) = I$.
O modelo na forma reduzida fica:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} A^{-1} B_j X_{t-j} + A^{-1}\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{p} \Phi_j X_{t-j} + e_t,$$

em que
$A^{-1}B_j \equiv \Phi_j$;
$Ae_t = \varepsilon_t$.
Há duas representações equivalentes de X_t, dependendo de o modelo partir da forma reduzida ou estrutural.

Decomposição de Blanchard e Quah

Partindo da forma reduzida, pode-se escrevê-lo como:

$$\left(I-\sum_{j=1}^{p}\Phi_j L^j\right)X_t = e_t \Longrightarrow X_t = \left(I-\sum_{j=1}^{p}\Phi_j L^j\right)^{-1} e_t \Longrightarrow$$

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j L^j\right) e_t, \qquad (3)$$

em que

$C_0 \equiv I$;

$\left(I-\sum_{j=1}^{p}\Phi_j L^j\right)^{-1} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} C_j L^j$;

$var\left(e_t\right) = \Sigma$.

Decomposição de Blanchard e Quah

Partindo da forma estrutural, obtém-se:

$$\left(A - \sum_{j=1}^{p} B_j L^j\right) X_t = \varepsilon_t \Longrightarrow X_t = \left(A - \sum_{j=1}^{p} B_j L^j\right)^{-1} \varepsilon_t \Longrightarrow$$

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j\right) \varepsilon_t, \qquad (4)$$

em que $\left(A - \sum_{j=1}^{p} B_j L^j\right)^{-1} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j$.

Decomposição de Blanchard e Quah

Dado que $C_0 = I$, das equações (4) e (3) resultam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A_0\varepsilon_t &= e_t \implies A_0\varepsilon_{t-j} = e_{t-j}; \\ A_j\varepsilon_{t-j} &= C_j e_{t-j} \implies A_j\varepsilon_{t-j} = C_j A_0 \varepsilon_{t-j} \therefore \\ A_j &= C_j A_0, \ j > 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$A_0\varepsilon_t = e_t \implies A_0\varepsilon_t = A^{-1}\varepsilon_t \implies A_0 = A^{-1}.$$

Essa relação é importante porque vão ser impostas restrições à matriz A_0.

$$\boxed{\begin{aligned} X_t &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j L^j\right) e_t \qquad (3) \\ X_t &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j\right) \varepsilon_t \qquad (4) \end{aligned}}$$

Decomposição de Blanchard e Quah

Esse sistema de equações resulta, como já foi visto, em $\frac{n(n+1)}{2}$ equações. No caso bivariado, são explicitamente dadas por:

$$\begin{aligned}
a_{11,0}^2 + a_{12,0}^2 &= var(e_1); \\
a_{11,0}a_{21,0} + a_{12,0}a_{22,0} &= cov(e_1, e_2); \\
a_{21,0}^2 + a_{22,0}^2 &= var(e_2).
\end{aligned}$$

Decomposição de Blanchard e Quah

Aqui introduzem-se as restrições de longo prazo. Considere a equação (4) no modelo bivariado:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{11,j} & a_{12,j} \\ a_{21,j} & a_{22,j} \end{bmatrix} \varepsilon_{t-j}.$$

Para que o choque de demanda não tenha efeitos de longo prazo sobre o produto, impõe-se:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{11,j} = 0.$$

Tendo-se A_0 e C_j, este obtido da estimação do modelo reduzido, e valendo a relação $A_j = C_j A_0$, pode-se obter A_j.

Decomposição de Blanchard e Quah

Para operacionalizar o procedimento:

- Estime o modelo $VAR\left(p\right)$ e obtenha as matrizes $\widehat{\Phi}_j$;
- Obtenha as matrizes C_j resolvendo:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{C}_j L^j\right) = \left(I - \sum_{j=1}^{p} \widehat{\Phi}_j L^j\right)^{-1};$$

- Sabendo que $A_j = C_j A_0$, imponha a restrição de longo prazo;
- Resolva o sistema de equações e encontre os coeficientes de A_0.

Impondo a restrição de longo prazo:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{11,j} = 0 = a_{11,0} \sum_{j=0}^{\infty} c_{11,j} + a_{21,0} \sum_{j=0}^{\infty} c_{12,j}.$$

Decomposição de Blanchard e Quah

- Uma vez obtida a matriz A_0, podem-se recuperar os erros estruturais da seguinte relação:

$$\varepsilon_t = A_0^{-1} e_t,$$

e, assim, encontrar a função resposta ao impulso e a decomposição da variância.

- Não se devem associar choques de demanda ao componente transitório do ciclo de negócios, e choques de oferta, ao componente permanente de tendência. O componente transitório pode ocorrer devido a uma combinação de choques na oferta e demanda, assim como choques de oferta afetarão simultaneamente os componentes cíclico e permanente da economia.

Decomposição de Blanchard e Quah - exemplo

- Exemplo do Canadá

BQ(var.2c)

```
> BQ(var.2c)

SVAR Estimation Results:
========================


Estimated contemporaneous impact matrix:
             e     prod       rw        U
e    -0.007644 -0.28470  0.07374 -0.21234
prod  0.543663  0.21658 -0.03379 -0.28652
rw    0.082112  0.28588  0.71874  0.06162
U     0.129451  0.05668 -0.01039  0.24111

Estimated identified long run impact matrix:
          e    prod    rw      U
e    104.37  0.0000  0.00 0.0000
prod  45.35  5.1971  0.00 0.0000
rw   168.41 -2.1145 10.72 0.0000
U    -19.26 -0.4562  1.41 0.5331
```

Exercício

- Atualizando o arquivo:

```
X<-read.csv("aula_varbcb_trim.csv",sep=";", dec=".", head=TRUE)
```

- Estime o VAR I com defasagem 2
- Calcule a função resposta ao impulso do choque do câmbio e juros no IPCA livres com intervalo de confiança
- Calculem a decomposição da variância para o IPCA livres e administrado
- Estimem a causalidade de Granger entre o IPCA livres e o câmbio
  - Sugestão: estimem um VAR com estas duas variáveis, depois façam o teste
- Estimem um var estrutural, com a seguinte matriz de impactos correntes:
  - Livres afetam os administrados
  - Câmbio afeta os preços livres e administrados
- Calculem a resposta ao impulso do câmbio a inflação de livres e administrados
- Estime a decomposição da variância dos preços livres