Enap Escola Nacional de Administração Pública

Programa Avaliação Socioeconômica de Projetos

Matemática Financeira

Brasília - 2015

Conteúdo para impressão

Fundação Escola Nacional de Administração Pública

Presidente
Gleisson Rubin

Diretor de Desenvolvimento Gerencial
Paulo Marques

Coordenadora-Geral de Educação a Distância
Natália Teles da Mota Teixeira

Conteudista

Ana Paula Cavalcanti(2013)

Diagramação realizada no âmbito do acordo de Cooperação Técnica FUB/CDT/Laboratório Latitude e Enap.

SUMÁRIO

Unidade 1 - TAXAS DE JUROS

Após concluir esta unidade, espera-se que você seja capaz de:

- Reconhecer a alteração de valor do dinheiro ao longo do tempo.
- Distinguir juros simples de juros compostos, a partir da explicitação de seu regime de capitalização.
- Calcular a capitalização de um montante, dada a taxa de juros.
- Distinguir equivalência e proporcionalidade de taxas de juros.
- Calcular taxas de juros equivalentes.
- Distinguir taxa nominal anual (TNA) e taxa efetiva anual (TEA).

1.1 Momento e Período

Antes de iniciarmos o módulo, é importante fazermos a distinção entre momento e período.

- Momento é um instante no tempo.
- Período é um intervalo de tempo decorrido entre dois pontos ou eventos do projeto.

Dessa forma, embora os benefícios e os custos de um projeto sejam gerados ao longo de um período, eles ocorrem num determinado momento. Por exemplo, o salário mensal de um trabalhador para o mês de janeiro é gerenciado ao longo de todo esse mês (período), sendo que, normalmente, só é pago ao final do mês (momento).

Logo, ao identificar os benefícios e custos de um projeto, deve-se determinar quando ocorreram. A importância desse procedimento está no fato de que o valor que se atribui hoje a R$ 1,00 é maior do que o valor dado ao mesmo R$ 1,00 disponível no futuro.
Embora existam várias razões para que a mesma quantia de dinheiro seja avaliada de forma diferente, em momentos distintos, o mais importante é a existência de investimentos alternativos para esse dinheiro. Um real recebido hoje é mais valioso do que R$ 1,00 a receber no futuro, porque pode ser investido durante o período de tempo considerado.

Para aqueles que desejam relembrar o tema sobre custos de oportunidade, sugere-se revisar esse conteúdo no curso Microeconomia Aplicada à Avaliação Socioeconômica de Projetos.

1.2 Taxa de Juros

O conceito de taxas de juros é considerado essencial para o tema da avaliação de projetos, pois será através dele que iremos apreçar o projeto.

O rendimento financeiro gerado ao investidor por um recurso (capital) aplicado em uma opção de investimento, durante determinado período de tempo, é chamado juros.

A taxa de juros (i) é proveniente da relação entre os juros (j) e o capital inicial (C). **Vejamos o exemplo.**

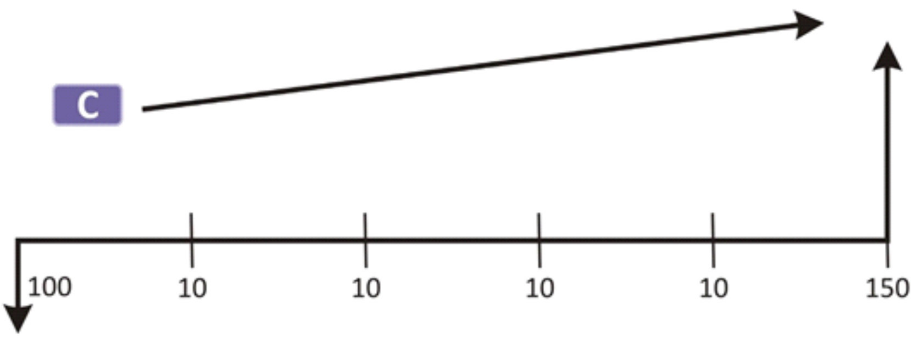
Se o capital inicial é de R$ 100,00 e os juros são de R$ 30,00, qual é a taxa de juros (i)?

Para solucionar esse problema, utilizaremos a equação i = j/C. Então, i = 30/100 = 30% é a taxa de juros. Mas quando se menciona uma taxa de juros, é necessário indicar o período a que ela se refere: ao dia (ad), à quinzena (aq), ao mês (a/m), ao trimestre (at), ao semestre (as) ou ao ano (a.a.). No nosso caso, a taxa é 30% a.a., pois o rendimento de R$ 30,00 é obtido após **um ano**; se fosse após um semestre ou um mês, seria ao semestre ou ao mês, respectivamente. Dessa forma, observa-se que a unidade da taxa de juros está intimamente relacionada ao período no qual os juros foram adquiridos.

1.2.1 Juros Simples

As parcelas de juros simples são sempre iguais, uma vez que, sob o regime de capitalização simples, os juros para cada período resultam da aplicação da **taxa de juros** sobre o **capital inicial**, e ambas variáveis não mudam com o tempo.

Considere o exemplo: Um capital emprestado (C) de R$ 100,00 é aplicado a uma taxa de juros de 10% a.a., durante cinco anos. O resultado são cinco parcelas iguais de R$ 10,00, e um valor, ao final do período, de R$150,00, fruto do somatório dos desembolsos ao principal.



Solucionando o exemplo: na capitalização simples, os rendimentos rendem apenas sobre o capital inicial (C), ou principal, e i a taxa de juros cobrada em n períodos. Isto quer dizer que os juros são obtidos como resultado do produto entre o capital inicial, a taxa de juros e o período. Considere a fórmula j = C * i. Para o primeiro período (n = 1), temos j = R$100,00 * 0,1 = R$10,00; para o período seguinte (n=2), temos j = C * i, e como o capital inicial sempre é R$ 100,00 e a taxa continua a mesma i = 0,1, o juro é o mesmo j = R$ 100,00 * 0,1 = R$ 10,00. Isso sempre ocorre para cada período, no regime de capitalização simples. O juro total da aplicação é a soma de todos os períodos, ou seja, 5*10,00 = 50,00. Podemos calcular o juro total da aplicação pela fórmula j = C * i * n, dessa maneira j = 100,00*0,1*5=50,00. O montante final (M) é dado pela equação M = C + j = 100,00 + 50,00 = 150,00. Essa fórmula também pode ser expressa da seguinte maneira M = C * (1+ n * i).

Resumindo, para o regime de capitalização simples, temos as seguintes fórmulas:

$$\boxed{j = C.i.n}$$

Onde "C" é o capital em R$; "i" é a taxa de juros; e "n" é o período.

M = C+J

$$\boxed{M = C.(1+n.i)}$$

1.2.2 Juros Compostos

No regime de capitalização composto, os juros do período anterior são incorporados ao capital inicial, para o cálculo dos juros para o período seguinte e, assim, começam a gerar novos juros. Em outras palavras, no sistema de juros compostos (capitalização composta), a taxa de juros incide sobre o montante acumulado no final do período anterior - capital inicial mais juros.

Existirá o mecanismo de incidência de juros sobre juros.

É o caso da taxa de juros que atualiza o rendimento dos depósitos de poupança. Alguém poderia imaginar que, como a taxa de poupança é 0,5% a/m, a taxa anual seria 6% a.a. (= 0,5% x 12), mas, como a capitalização é mensal, a taxa de juros de 0,5% a/m, ao final do ano, chega a 6,17% ao ano (=1,005^12=1,0617), pois gera juros sobre juros, como veremos a seguir.
Na linguagem do Excel, o símbolo ^ significa a potência, ou seja 2^3 é o mesmo que 23 ou 2*2*2 = 8.

Suponhamos que alguém tenha feito um depósito de poupança de R$ 100,00 no período de tempo igual a 0, ou seja, hoje. Após um mês, ele teria rendimento de R$ 100 x taxa de juros de 0,5/100 = R$ 0,50, o que acumularia um saldo de R$ 100,50. Para o segundo mês, nesse regime de capitalização, os juros serão calculados em cima do capital inicial mais os juros adquiridos no mês anterior, ou seja, RS 100,00 + R$ 0,50 = R$ 100,50. Dessa forma, o indivíduo teria um rendimento de R$ 100,50 x taxa de juros de 0,5/100 = R$ 0,5025, acumulando um saldo de R$ 101,0025. Após o terceiro mês, ele teria um rendimento de R$ 101,0025 * taxa de juros de 5/100 = R$ 0,5050125, e assim por diante. Se somássemos o total, teríamos R$100,00 + R$ 0,50 + R$ 0,5025 + R$ 0,5050125 = R$ 101,50751. Caso fôssemos utilizar o juro simples, seria simplesmente utilizar a fórmula M = C * (1+n *i) que, nesse caso, geraria 100 * (1 + 3 * 0,5/100) = R$ 101,50.

Assim, de maneira geral, as fórmulas para juros compostos são as seguintes:

$$M = C.(1+i)^n$$

e como M = C + j, temos:

$$j = M - C$$

ou substituindo temos:

$$j = C.((1+i)^n - 1)$$

Veja os exemplos.

Exemplo 1: O montante e os juros compostos obtidos em uma aplicação de um capital C = R$ 1.000,00, durante 4 anos, à taxa de 10% ao ano são dados por:

$$M = C.(1+i)^n = 1.000{,}00.(1+0{,}1)^4 = 1.000{,}00.(1{,}1)^4 = 1.000{,}00.1{,}4641 = 1.464{,}10$$

Logo, como

$$j = M - C = 1.464{,}10 - 1000{,}00 = 464{,}10$$

ou de outra maneira

$$j = R\$\ 1.000{,}00.((1+0{,}1)^4 - 1) = 464{,}10$$

Exemplo 2: Suponha que uma pessoa peça um empréstimo de R$ 1.000,00 a um banco que cobra uma taxa de juros de 4% ao semestre, durante três semestres, em um regime de capitalização composto, ou seja, a taxa de juros incide sobre o montante acumulado no final período anterior.

A tabela abaixo resume os juros acumulados, que são capitalizados semestralmente, e o montante a ser reembolsado após três semestres:

Período	Dívida ao início do semestre	Juros semestrais	Dívida ao final do semestre
1	R$1.000,00	R$40,00	R$1.040,00
2	R$1.40,00	R$41,60	R$1.081,60
3	R$1.081,60	R$43,26	R$1.124,86

Observe que os juros semestrais são crescentes (40,00; 41,60; 43,26), pois foram calculados sobre o capital inicial acrescido dos juros capitalizados no período anterior.

O montante total a ser pago no final de três semestres é de R$ 1.124,86, e pode ser obtido com a aplicação da seguinte fórmula:

$$M = C.\ (1+0,04)^n$$

Em que M é o montante total a ser pago, C é o capital inicial e n é o número de períodos que decorre entre o momento em que se recebe o empréstimo e os prazos para ser reembolsado com juros. No nosso caso, n = 3.

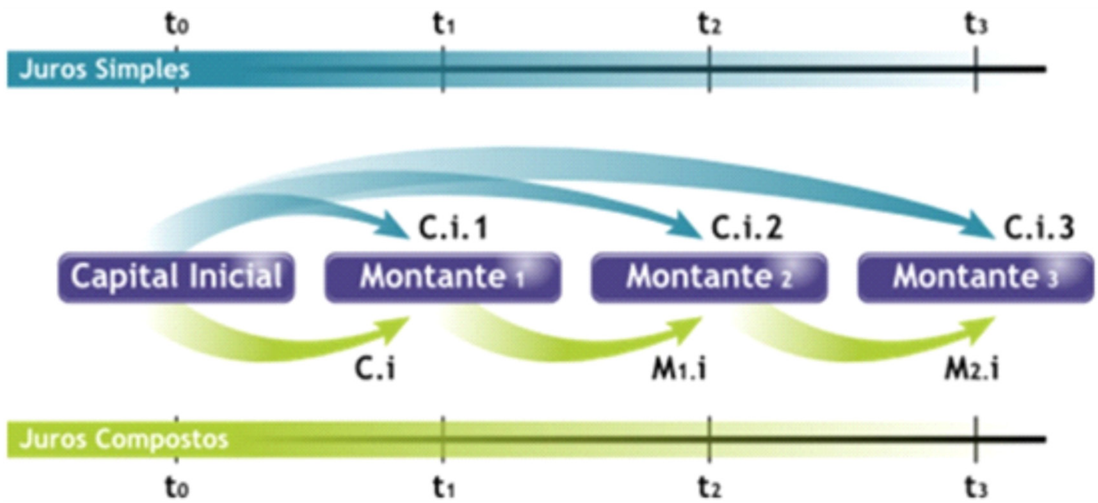
Considerando o exemplo utilizado para o regime de capitalização simples, no tópico 1.2.1, veja, na tabela abaixo, a evolução dos juros no regime de capitalização composto, para os mesmos cinco períodos (n=5 anos). O período utilizado nas fórmulas abaixo poderia ser em dias, ou meses, ou qualquer outro período. Apenas seria necessário que a taxa de juros estivesse expressa respectivamente para o mesmo período, ou seja, ao dia, ou ao mês, ou qualquer outro período.

Temos as seguintes fórmulas para o regime de capitalização composto:

Tempo	Juros	Montante	Fórmula
0	0	100,00	M=C
1	10	110,00	$M=C(1+i)^1$
2	11	121,00	$M=C(1+i)^2$
3	12,1	133,10	M=C(1+i)3
4	13,31	146,41	$M=C(1+i)^4$
5	14,64	161,05	$M=C(1+i)^5$

1.3 Juros Simples X Juros Compostos

Já vimos que existem duas modalidades diferentes de juros que incidem sobre o capital (juros simples e compostos). Na modalidade de juros simples, os juros nunca passam a formar parte do capital, e no caso, de juros compostos, os juros periodicamente passam a formar parte do capital, e com eles começam a ser gerados novos juros, conforme podemos constatar mais claramente nas figuras a seguir.



Observe que para períodos de capitalização inferiores à unidade (1 mês), os juros gerados pelo regime de capitalização simples são maiores que os gerados pelo composto, depois o resultado se inverte.

Capital inicial = R$ 10.000,00 Taxa Juros = 10% a/m		
Mês	Juros Simples Acumulados	Juros Compostos Acumulados
t=5 dias	R$166,67	R$160,12
t=10 dias	R$333,33	R$322,80
t=15	R$500,00	R$488,09
t=20	R$666,67	R$656,02
t=25	R$833,33	R$826,65
t=1 mês	R$1.000,00	R$1.000,00
t=1,5 meses	R$1.500,00	R$1.536,90
t=2 meses	R$2.000,00	R$2.100,00

No nosso cotidiano, estamos sempre nos deparando com o regime de capitalização composto, como para uma aplicação em poupança, CDB ou em um empréstimo comum em banco. O regime de capitalização simples é aplicado apenas para o cheque especial, já que a taxa é mensal e geralmente os clientes utilizam o cheque especial por alguns dias, ou seja, por um período inferior a um mês. Dessa forma, como pudemos observar na tabela acima, é mais vantajoso para os bancos utilizar o regime de capitalização simples, uma vez que o período será inferior à unidade (1 mês).

Assim, observamos que os juros simples diários são maiores que os juros compostos diários. Note também que a diferença vai diminuindo conforme o período vai se aproximando de 1 mês. Isso acontece, pois, no regime de capitalização composto, os juros do período anterior são incorporados para o cálculo do próximo juro, crescendo paulatinamente, bem diferente dos juros simples, que representam uma distribuição uniforme dos juros incorporados ao capital ao longo do período. Somente após completar o mês, é que os juros compostos superarão os juros simples. Matematicamente, pode ser explicado da seguinte forma: todo número que foi descapitalizado com potência menor que um tende a crescer exponencialmente. E, se comparado com valores distribuídos linearmente ao longo do mês, são inferiores até chegar ao final do mês.

1.4 Equivalências das Taxas de Juros

Encontrar taxas de juros equivalentes é um procedimento útil para avaliação de projetos. Isso porque podemos querer comparar projetos distintos, por exemplo, um que apresente uma taxa de retorno mensal e outro que apresente uma taxa de retorno anual. Com a equivalência das taxas, poderemos verificar qual projeto será mais vantajoso, encontrando a taxa equivalente anual para o projeto que tem taxa de retorno mensal e comparar com a taxa de retorno anual do outro projeto.

Para que duas taxas de juros correspondentes a diferentes períodos sejam equivalentes entre si, é necessário que a aplicação delas sobre um mesmo capital inicial (C) produza o mesmo montante final (M), em igual intervalo de tempo (n) do investimento.

Assim, 1% a/m, se capitalizado mês a mês por juros compostos, é equivalente a 12,6825% a.a., e 1% a/m é equivalente a 12% a.a., se capitalizado mês a mês por juros simples.
A equivalência entre as taxas pode ser visualizada nos exemplos de juros compostos, abaixo:

Uma taxa semestral de 4%, aplicada a juros compostos sobre um capital de R$ 1.000,00, obtém, no prazo de três semestres, um montante total igual a:

$$M = (R\$\ 1.000{,}00)\ .\ (1{,}04)^3 = (R\$\ 1.124{,}86)$$

A fórmula utiliza a taxa semestral de 4% e o número de semestres de duração da operação igual a três.

A taxa trimestral de 1,9804% aplicada a R$ 1.000,00 gera, após seis trimestres, mesmo período de três semestres, o mesmo montante:

$$M = (R\$\ 1.000{,}00)\ .\ (1{,}019804)^6 = (R\$\ 1.124{,}86)$$

A fórmula considera uma taxa trimestral de 1,9804% e seis trimestres de duração da operação. Isso implica que as taxas de 4% ao semestre e 1,9804% ao trimestre são equivalentes.

É importante notar que as taxas são efetivas, o que significa que são as verdadeiras taxas pagas pela pessoa que recebe o empréstimo.

A fórmula geral que permite transformar uma taxa efetiva em outra equivalente é a seguinte:

$$(1+i1)^{n1} = (1+i2)^{n2}$$

Em que: i1 é a taxa expressa em um período associado a n1, e i2 é a taxa equivalente expressa em outro período, associada a n2. É importante que os períodos n1 e n2 sejam iguais, apenas escritos de maneira diferente.

$$(1+0{,}04)^3 = (1+i2)^6$$

Resolvendo, teremos $i2 = 1{,}9804\%\ at$

O cálculo da taxa efetiva semestral (is), equivalente a uma taxa efetiva bimestral (ib), pode ser feito como segue:

$$1 + TEA = (1 + im)^{12}$$

A tabela abaixo relaciona a Taxa Efetiva Anual (TEA) com outras taxas efetivas expressas em períodos distintos:

Fórmula	Taxa	Período	Número de vezes
$1+ia = (1+isem)^{2}$	isem	semestre	2
$1+ia = (1+iquad)^{3}$	iquad	quadrimestre	3
$1+ia = (1+itrim)^{4}$	itrim	trimestre	4
$1+ia = (1+imes)^{12}$	imes	mês	12
$1+ia = (1+iquinz)^{24}$	iquinz	quinzena	24
$1+ia = (1+isemana)^{52}$	isemana	semana	52
$1+ia = (1+idias)^{365}$	idias	dia	365

E a tabela a seguir apresenta um exemplo com 4 taxas equivalentes a juros compostos:

C = R$ 100,00 e n = 1 ano

Capital	Taxa	Prazo	Juros
R$ 100,00	0,1% ad	360 dias	R$ 143
R$ 100,00	3,04% am	12 meses	R$ 143
R$ 100,00	19,71% as	2 semestres	R$ 143
R$ 100,00	43,31% aa	1 ano	R$ 143

1.5 Proporcionalidade dos Juros

Adicionalmente ao conceito de juros equivalentes, existe o conceito de juros proporcionais. Consideramos que duas taxas são proporcionais, quando elas estão na mesma proporção em relação ao período de tempo. Por exemplo: uma taxa de juros de 12% ao ano é proporcional a uma taxa 1% ao mês, pois 12 está para 1 na mesma proporção que 1 ano (12 meses) está para 1 mês.

Note que a taxa de juros proporcional é igual à taxa equivalente apenas para o regime de capitalização simples, em que 1% a/m é equivalente a 12% a.a., pois geram o mesmo montante em um mesmo período de tempo, se utilizarmos juros simples. Entretanto, isso não é válido para o regime de capitalização composto, pois já vimos em exemplos anteriores que a taxa anual equivalente a juros composto da taxa 1% a/m é ((1+0,01)^12 -1) = 12,6825% a.a.

1.6 Taxas Nominal e Efetiva

Outro conceito importante é a taxa de juros nominal. A taxa nominal é a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. A taxa nominal é geralmente fornecida em termos anuais (Taxa nominal anual - TNA), e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais, mensais, diários, etc.

São exemplos de taxas nominais:

- 12% a.a. com capitalização mensal.
- 12% a.a. com capitalização trimestral.
- 12% a.a. com capitalização semestral.
- 15% a.a. com capitalização trimestral.

A taxa nominal, apesar de bastante utilizada no mercado, não representa uma taxa efetiva e, por isso, não deve ser usada nos cálculos financeiros no regime de juros compostos.
Toda taxa nominal traz em seu enunciado uma taxa efetiva implícita ou associada, que é a taxa de juros a ser aplicada em cada período de capitalização. Essa taxa efetiva implícita é sempre calculada de forma proporcional.

Quando falamos qual será a taxa efetiva implícita que equivale à taxa de 12% ao ano, capitalizada mês a mês, estamos falando de uma taxa distinta daquela equivalente à taxa de 12% ao ano, capitalizada trimestralmente, que por sua vez é diferente da taxa de 12% ao ano, capitalizada semestralmente. No primeiro caso, a taxa de juros de 12% ao ano, capitalizada mês a mês, significa que devemos dividir 12% por 12 meses (conceito proporcional) para obter a taxa efetiva implícita à taxa nominal, ou seja, a taxa que realmente será aplicada na operação financeira a cada mês, nesse caso, 1% ao mês. No segundo - 12% ao ano, capitalizada trimestralmente - devemos entender que a taxa ao trimestre é igual a 12% dividido por 4 (número de trimestres em 1 ano), que é 3%, ou seja, 3% ao trimestre. E, no terceiro caso, divide-se 12% por 2, obtendo-se uma taxa de 6% ao semestre.

Conforme podemos observar, a taxa efetiva implícita de uma taxa nominal anual é sempre obtida de forma proporcional para o período de capitalização da taxa nominal. A taxa efetiva anual equivalente (TEA) a essa taxa efetiva implícita é sempre maior que a taxa nominal que lhe deu origem, pois essa equivalência é sempre feita no regime de juros compostos. A TEA associada à TNA será tanto maior quanto maior for o número de períodos de capitalização da taxa nominal.

Nos exemplos acima, temos TNA = 12% a.a., com capitalização mensal que está associada à taxa efetiva implícita de 1% a/m, e, portanto, para obter a TEA, basta calcular a taxa equivalente anual à taxa de 1% a/m. Logo:

$$\boxed{\mathrm{TEA} = ((1+0{,}01)\text{^}12)-1 = 12{,}6825\%\ \text{a.a.}}$$

No segundo exemplo, temos TNA = 12% a.a., com capitalização trimestral que está associada à taxa efetiva implícita de 3% at, e, portanto, para obter a TEA, basta calcular a taxa equivalente anual à taxa de 3% at. Nesse caso:

$$\boxed{\mathrm{TEA} = ((1+0{,}03)\text{^}4)-1 = 12{,}55088\%\ \text{a.a.}}$$

Finalizando, no último exemplo, temos TNA = 12% a.a., com capitalização semestral que está associada à taxa efetiva implícita de 6% as, e, portanto, para obter a TEA, basta calcular a taxa equivalente anual à taxa de 6% as. Logo:

TEA = ((1+0,06)^2)-1 = 12,36% a.a.

A tabela abaixo mostra um resumo comparativo entre a taxa nominal e a taxa efetiva:

Item	Taxa Nominal	Taxa Efetiva
Símbolo	Inom	i
Definição	Prazo não coincide com prazo de capitalização	Prazo coincide ou trata-se de uma equivalente
Exemplo	6,00% a.a. capit. mensal	10% a.a.
Produto	SFH, Poupança	CDB, Empréstimos
Observação	Não paga ou cobra o que anuncia	Aparentemente paga ou cobra o que anuncia

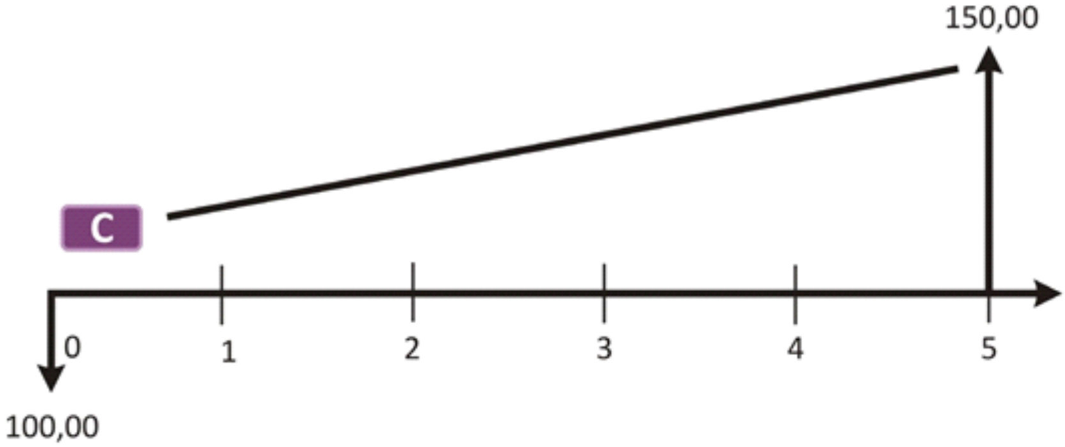
Ao final desta unidade, espera-se que você seja capaz de:

- Elaborar um diagrama de fluxo de caixa, dado o capital inicial, a taxa de juros e o período de capitalização.
- Selecionar a fórmula adequada para cálculo de valor presente e valor futuro, de acordo com o problema apresentado.

2.1 Valor Presente e Valor Futuro

Constitui-se como ferramenta fundamental para a avaliação de projetos a distinção entre o valor presente, ou atual, e o valor futuro. A ideia principal em relação ao valor presente e ao valor futuro é a de que o dinheiro não tem o mesmo valor em períodos distintos. Para analisar a relação custo-benefício de um projeto, é preciso, por exemplo, comparar valores a se receber em dez anos com valores investidos atuais. Como já vimos nas seções anteriores, podemos trazer os ganhos futuros para a data do início do projeto e, dessa forma, comparar com os valores investidos, apenas descontando a taxa de juros dos valores futuros, respeitando o regime de capitalização e o período no qual o valor se encontra. Se, ao contrário, deseja-se comparar um valor de hoje (presente) a um valor futuro, pode-se levar o valor presente ao instante futuro, por meio de capitalização de taxa de juros ao valor atual. O importante é que apenas podemos comparar valores absolutos no mesmo instante de tempo.

O valor futuro está relacionado com o valor presente pelas fórmulas já mencionadas no módulo 1, a partir disso podemos dizer que o valor futuro (VF) é igual ao montante (M), e o valor presente (VP) é igual ao capital inicial (C), para um dado valor.



Assim, o valor futuro (VF) de R$ 150,00 - considerando cinco períodos e a taxa de juros simples de 10% ao ano - equivale ao valor presente ou atual (VP) de R$ 100,00. No caso de utilizarmos os juros compostos, teremos que utilizar as fórmulas de juros compostos e, como consequência, o valor futuro no quinto período seria de R$ 161,05 .

Apenas relembrando M = C (1 + i)^n , logo M = 100,00 (1 + 0,1)^5 = 161,05.

Os valores somente podem ser comparados se estiverem referenciados na mesma data. Isso significa que operações algébricas apenas podem ser executadas com valores referenciados na mesma data.

O processo de análise de projetos depende de várias combinações para se calcular o retorno total dos projetos e escolher a melhor alternativa. Assim, é necessário elaborarmos um diagrama de fluxo de caixa (DFC).

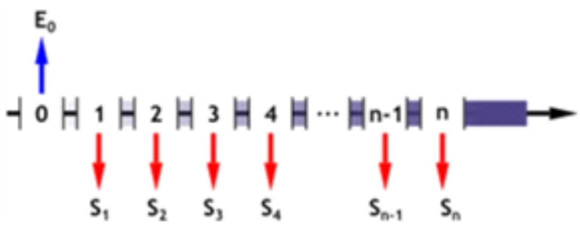
2.2 Diagrama de Fluxo de Caixa (DFC)

Consiste na representação gráfica da movimentação de recursos financeiros (entradas ou receitas e saídas ou despesas de fluxos de caixa) ao longo do tempo.

Na escala horizontal: está representado o tempo, as marcações temporais representam o número de períodos transcorridos e devem estar compreendidos entre 0 e n.

As setas ou segmentos de reta para cima consistem nas entradas ou recebimentos de dinheiro. As setas ou segmentos de reta para baixo referem-se às saídas de dinheiro ou pagamentos.

No exemplo abaixo, a pessoa tomou emprestado no período 0 e pagou em n vezes.



Assim, **E** , no tempo **t=0** , por ser um valor **recebido** do empréstimo (entrada de recurso), é representado no diagrama de fluxo de caixa (**DFC**) com uma seta para cima. Já a sequência de **S** é representada no **DFC** com setas para baixo, uma vez que são as parcelas **pagas** devido ao empréstimo (saída de recurso).

O tempo **n** é o período de capitalização.

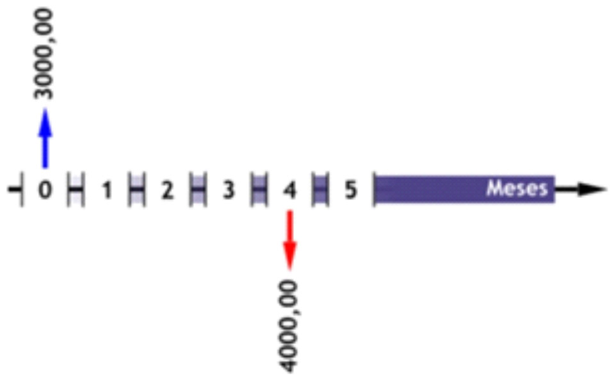
A taxa de juros (**i**) consiste no custo de oportunidade do dinheiro. Representa a medida relativa de incidência do valor do dinheiro no tempo. A taxa deve ser expressa na unidade equivalente ao período de capitalização, ou seja, se o tempo do DFC for expresso em anos, a taxa deve ser também expressa em termos anuais.

Vejamos alguns exemplos de **DFC**.

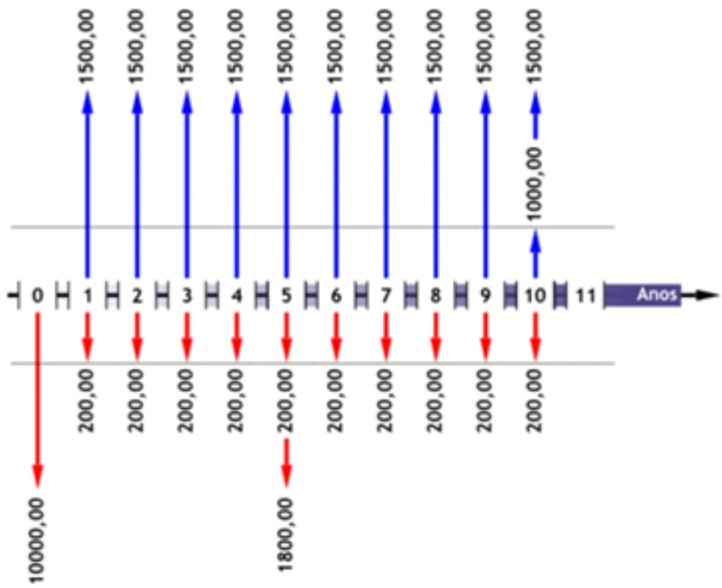
Exemplo 1 **Exemplo 2** **Exemplo 3**

Represente o diagrama de fluxo de caixa (DFC) de um indivíduo que emprestou R$ 3.000,00 a um colega que irá lhe devolver R$ 4.000,00 ao final de 4 meses.

Represente o DFC, do ponto de vista do colega.



Sua empresa investiu R$ 10.000,00 na compra de uma máquina. Daqui a um ano e pelos próximos 10 anos, essa máquina irá lhe proporcionar uma receita bruta anual de R$ 1.500,00. Ao final do 10º ano, você irá vendê-la por R$1.000,00. As despesas anuais de manutenção do equipamento ficarão em torno de R$ 200,00 por ano e, ao final do quinto ano, será necessária uma revisão que lhe custará R$ 1.800,00. Represente o DFC.



Particularmente, quando temos uma sequência de pagamentos ou recebimento com valores nominais iguais e distribuídos em intervalos regulares de tempo, chamamos esses valores de anuidade ou prestação, que será representada neste curso por A.

Vejamos a seguir como transformarmos o valor futuro em valor presente, bem como o que deve ser considerado para a realização dessa transformação.

2.3 Relação entre Valor Futuro e Valor Presente

O valor futuro, em um período qualquer "n" , de uma quantia em dinheiro que hoje uma pessoa tem, é obtido pela capitalização dos juros gerados nesses n períodos. A fórmula para calcular o valor futuro segue abaixo. Repare que é a mesma que foi indicada para determinar o montante total no esquema de juros compostos [vide módulo 1, tópico 1.2.2].

$$M = F = VP.(1+i)^n$$

Note que M (montante total) foi substituído por VF (valor futuro), e C (capital inicial investido) pelo VP (valor atual ou valor presente), porque essas expressões são utilizadas na avaliação de projetos.

Quando um valor futuro é determinado, é necessário indicar o exato momento em que é calculado.

Como ocorre para qualquer fórmula de matemática financeira, deve haver correlação entre o número de períodos durante os quais o montante de dinheiro gera juros e a taxa efetiva de juros correspondente a cada período.

Exemplo 4 | Exemplo 5 | Exemplo 6

Exemplo 4

Considere que você deseja determinar hoje o valor futuro de R$ 100,00 após um ano, considerando que a taxa efetiva semestral seja de 10%.

Como a taxa efetiva é semestral, vamos escrever o período em termos de semestres, ou seja, 1 ano = 2 semestres e, portanto, n assume o valor 2 (número de semestres em um ano). O valor futuro no momento t = 2 de um calendário semestral é o seguinte:

$$Vf2 = 100.(1,1)^2 = R\$\ 121,00$$

Também podemos trabalhar com períodos anuais: n assume o valor 1 e deve ser utilizada a taxa efetiva anual equivalente à taxa efetiva semestral de 10%, que equivale a 21% a.a.

Veja tópico 1.4 do módulo 1 e utilize a fórmula $(1 + i1)^{n1} = (1 + i2)^{n2}$.

Essa taxa é obtida ao capitalizarmos a taxa de juros de 10% as para os dois semestres. O valor futuro no momento t=1 de um calendário anual é:

$$Vf1 = 100.(1,21)^1 = R\$\ 121,00$$

Note que o valor futuro calculado nas duas maneiras é o mesmo R$ 121,00 após um ano e equivale a R$ 100,00 hoje.

Exemplo 5

Deseja-se determinar hoje o valor futuro de uma quantia de R$ 100,00 após 14 meses, a uma taxa efetiva semestral de 10%.

Nesse caso, é conveniente transformar a taxa efetiva semestral em uma taxa efetiva mensal (1,6012% a/m), que é obtida por meio da fórmula $(1 + i1)^{n1} = (1 + i2)^{n2}$, em que i1 = 10% as, n1 = 1 (1 semestre) e n2 = 6 (6 meses). Resolvendo, chegamos a i 2 = ((1,10 ^ (1/6)-1)* 100) = 1,6012% a/m. O valor futuro no momento 14 de um calendário mensal é:

$$\boxed{Vf14 = 100.(1{,}016012)^{14} = R\$\ 124{,}91}$$

Dessa forma, o valor R$ 124,91 em 14 meses equivale a R$ 100,00 hoje.

Exemplo 6

A fórmula de valor futuro pode ser adaptada para o caso em que a taxa de juros não permaneça constante através do tempo.

É possível calcular o valor futuro de uma quantia de R$ 100,00 após 6 meses, as taxas efetivas mensais (i m) de 1% a/m, durante os primeiros 4 meses, e de 1,5% a/m, durante os meses restantes:

Ou seja, os R$ 100,00 são capitalizados a 1% a/m, durante os primeiros quatro meses, e a 1,5% a/m, durante os 2 meses posteriores.

$$\boxed{VF = 100.(1{,}01)^{4}.(1{,}015)^{2} = R\$\ 107{,}21}$$

Podemos também, da mesma forma, dado o valor futuro, calcular o valor presente. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 7 **Exemplo 8**

Exemplo 7

Qual o valor presente do valor futuro igual R$ 400,00, a ser recebido em um ano, se a taxa efetiva for de 2% bimestral? Temos VF = VP * (1 + i)^n, logo 400,00 = VP * (1 + 0,02)^6 (não esquecendo que o ano tem seis bimestres) => VP = R$ 355,19.

Se, hoje, uma pessoa deposita R$ 355,19 em um investimento que rende 2% por bimestre, irá obter R$ 400,00 após um ano.

Exemplo 8

Apresenta-se, neste caso, a aplicação da fórmula à situação em que a taxa de juros não é constante ao longo do tempo considerado.

O valor presente do valor futuro igual a R$ 400,00, a receber após um ano, se as taxas efetivas bimestrais vigentes forem de 1,5% ab, para os 4 primeiros bimestres, e de 2% ab, para os restantes, é igual a:

$$400 = [VP.(1+0{,}015)^4]\,(1+0{,}02)^2 \Rightarrow VP = R\$\ 362{,}24$$

Neste caso, aplica-se primeiro a fórmula para trazer o valor presente até o quarto bimestre. Por isso é que se utiliza $400/(1+0{,}015)^4 = R\$\ 376{,}87$ e depois se utiliza esse valor resultante para trazê-lo até o início do período, utilizando $376{,}87/(1+0{,}02)^2 = R\$362{,}24$.

2.4 Valor Presente – Séries de Pagamentos

Se, em vez de uma única quantia em dinheiro, forem várias e de valores diferentes, o valor atual ou presente do conjunto de recursos é obtido pela adição dos valores atuais ou presentes de cada uma:

$$VP = M1/(1+i)^1 + M2/(1+i)^2 + M3/(1+i)^3 + \ldots + Mn/(1+i)^n$$

Em que M i tem o mesmo significado que VF, mas, como tem valores diferentes, utilizamos essa nomenclatura.

Veja o **Exemplo 9**

Com a taxa efetiva anual de 10%, calcular o valor presente dos valores futuros: R$ 200,00 no prazo de um ano e R$ 300,00 dentro de dois anos.

Temos M1 = 200,00, pois é após um ano, e M2 = 300,00, pois é após 2 anos. O valor presente é determinado como segue:

$$VP = 200/(1+0{,}10)^1 + 300/(1+0{,}10)^2 = 429{,}75$$

Ou seja, para obter essas duas retiradas nos momentos indicados, R$ 429,75 devem ser depositados hoje.

Uma série de pagamento é definida formalmente como toda série finita ou infinita de entradas e saídas de caixa, com um dos objetivos abaixo.

1. Amortização de um empréstimo.
   Ex.: financiamento imobiliário, crédito direto ao consumidor (CDC).

2. Capitalização de um montante.
Ex.: título de capitalização, poupança programada, consórcio.

3. Geração de uma renda permanente.
Ex.: plano de previdência, compra de imóvel para aluguel.

Uma série de pagamentos com prestações iguais pode ser classificada de acordo com o número de prestações ou parcelas, e também quanto ao momento do pagamento da primeira. Dependendo do número de prestações, são chamadas de:

- Plano de anuidades: quando o número de prestações é finito.
- Plano de perpetuidades: quando se trata de prestações intermináveis (infinito).

A classificação das prestações, tendo em conta o momento de pagamento da primeira parcela, contado a partir do momento de execução da operação, exige que os prazos sejam definidos de acordo com o calendário das prestações. Elas são chamadas de:

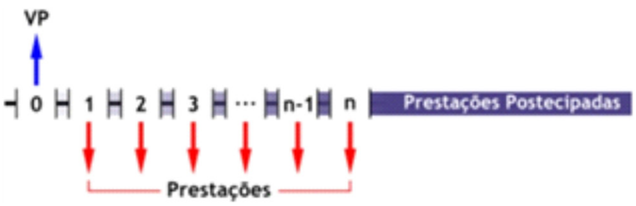
- Plano de prestações **vencidas** (postecipadas): quando a primeira é paga ao final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é vencido quando a primeira é paga ao final do primeiro mês.
- Plano de prestações **adiantadas** (antecipadas): quando a primeira é paga no início do primeiro período. Por exemplo, se as parcelas são prestações mensais, o plano é de prestações adiantadas, se a primeira é paga no início do primeiro mês.
- Plano de prestações **diferidas:** quando a primeira cota é paga em algum momento futuro que não seja o final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é de prestações diferidas, se a primeira é paga no final do segundo mês ou mais tarde.

O pagamento **postecipado** ocorre quando o pagamento das prestações começa ao final do primeiro período, ou seja, em t = 1.

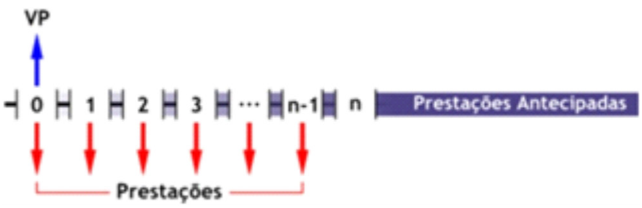
O pagamento **antecipado** ocorre quando o pagamento das prestações começa no início do primeiro período, ou seja, em t = 0.

O pagamento **diferido** ocorre quando a primeira prestação começa no fim do período q, ou seja, em t = q.

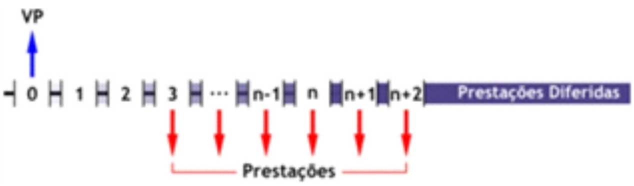
A seguir, temos um exemplo gráfico de pagamentos de prestações postecipadas:



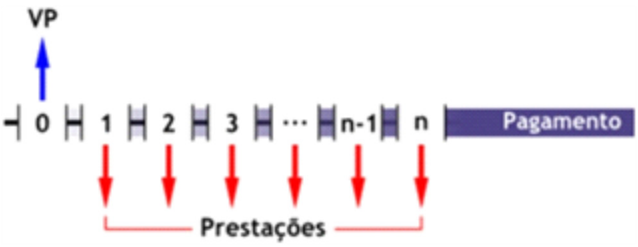
Veja um exemplo gráfico de pagamentos de prestações antecipadas.



E veja um exemplo gráfico de pagamentos de prestações diferidas.



2.5 Valor Presente - Parcelas Vencidas



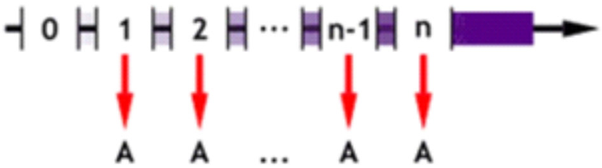
O gráfico acima representa a situação de um valor presente de um pagamento postecipado de prestações iguais, em n períodos.

As n anualidades vencidas são distribuídas no tempo, segundo o seguinte calendário:

Tempo **0 1 2... n**

Distribuição das prestações **0AA...**

A, na qual A é o valor de cada uma das prestações



O valor presente desse conjunto de n prestações é:

$$VP =_{n} Sn1\ A/(1+i)^{\wedge}{}_{n} = A/(1+i)^{\wedge}{}_{1} + \dots + A/(1+i)^{\wedge}{}_{n}$$

A fórmula para calcular o valor atual resultante de um pagamento de n prestações iguais postecipadas é resultado da fórmula da soma de uma progressão geométrica (PG) com n termos e razão igual 1/(1+i)^n, ou seja, a equação acima pode ser resumida da seguinte maneira:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^{\wedge}n)]\}$$

Em que A é o valor das prestações também chamadas de anuidades.

Para que a fórmula seja aplicada corretamente, deve existir correlação entre a frequência das prestações e a taxa efetiva utilizada, ou seja, se as prestações forem bimestrais, a taxa utilizada tem que ser a efetiva bimestral.

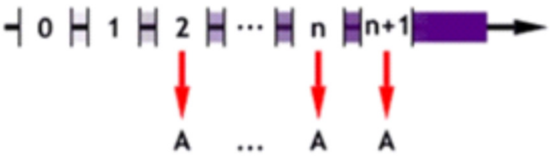
2.6 Valor Presente - Anuidades Adiantadas e Diferidas

A fórmula obtida no item anterior, para o caso de prestações vencidas, pode ser adaptada aos efeitos do cálculo do valor atual dos planos de prestações adiantadas ou diferidas.

Caso das prestações adiantadas - se as n anuidades são adiantadas, elas são distribuídas ao longo do tempo, como segue:

Tempo **0 1 2... (n-1)n**

Distribuição das prestações **A A A... A 0**



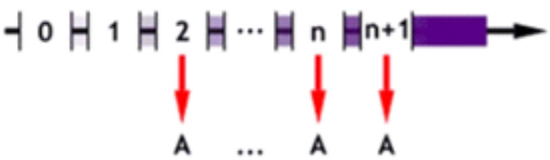
Ao usar a fórmula anterior sem nenhuma modificação, o valor resultante figura no momento correspondente a um período anterior da primeira cota, nesse caso, o momento t = -1. Observe que a primeira prestação já se encontra no período t = 0, logo, basta trazer as n-1 prestações futuras para o tempo t = 0. Olhando dessa maneira, temos uma prestação no valor de A em t = 0 e uma série com n-1 prestações começando em t=1, que é o mesmo caso do item anterior com n-1 prestações. Dessa forma tem-se:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}/(1+i)^{(q-1)}$$

Caso das prestações diferidas - como existem muitas variantes de plano de prestações diferidas, apresentamos o seguinte caso:

Tempo **0 1 2... n (n+1)**

Distribuição das prestações **0 0 A... A A**



Como podemos ver, a primeira cota é paga no final do segundo período. Isso implica que, ao usar a fórmula $VP = \{(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]\}$ para atualizar, o valor resultante fica expresso no momento t = 1. Nesse caso, para que esse valor fique no momento t = 0, é necessário atualizar um período o resultado obtido, descontando-se uma vez (t = 1) à taxa de juros. A nova fórmula para essa situação é $VP= \{(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]\}/(1+i)^1$. No caso geral, onde a prestação é diferida e inicia-se no período q, a fórmula será:

$$VP = \{(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]\}/(1+i)^{(q-1)}$$

Veja o Exemplo 10.

Calcule o valor atual de um conjunto de seis prestações semestrais, iguais e consecutivas de R$ 300,00 à taxa efetiva de 1% mensal.

Como as prestações são semestrais, é necessário calcular a taxa efetiva semestral equivalente à efetiva mensal de 1% a/m, ou seja, 6,152% ao semestre, que pode ser obtida calculando por meio da capitalização da taxa de 1% em seis meses = ((1,01^6)-1)*100).

Se as prestações são vencidas, o valor atual é calculado diretamente, usando a fórmula:

VP = {(A/i).[1-(1/(1+i)^n)]}

Em que: A = 300,00, i = 6,152% a.s.
e n = 6. => VP = R$ 1.468,18

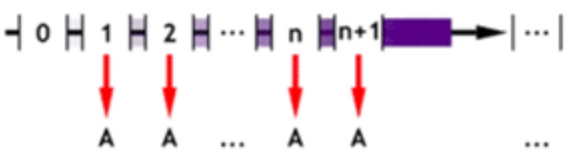
Se as prestações são adiantadas, o valor atual é: VP = A + {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n-1)]}, pois são apenas 5 prestações, uma vez que a primeira já se encontra no período t =0 ... => VP = 1558,50. Se a primeira cota semestral for paga ao final do décimo oitavo mês de concretizada a operação, o valor atual do plano é: VP = {(A/i)*[1-(1/(1+i)^n)]}/(1+i)^(q-1), em que q = 3, pois, como o primeiro pagamento é no décimo oitavo mês, temos o primeiro pagamento no terceiro semestre, ou seja, q = 3. Assim, VP = 1.302,93.

2.7 Valor Presente - Perpetuidades

O esquema seguinte permite visualizar graficamente o fluxo de perpetuidades vencidas:

Tempo **0 1 2... n (n+1)**

Distribuição das prestações **0 0 A... A A**



Se, na fórmula de anuidades vencidas, consideramos que n tende ao infinito, a expressão resultante é o valor presente de um plano de perpetuidades vencidas: VP=A/i , que pode ser alcançada sempre considerando o conceito de que o valor presente (VP) é obtido pelo desconto do valor futuro (VF), que no caso é A, utilizando uma taxa de juros i.

A aplicação da fórmula é muito simples. Confira no **Exemplo numérico 11**.

Deseja-se calcular o valor presente de um plano de perpetuidades bimestrais vencidas, de R$ 25,00 iguais e consecutivas, quando a taxa efetiva mensal for de 1%.

Como a perpetuidade é bimestral, ao aplicar a fórmula de perpetuidade, deve-se usar a taxa efetiva bimestral equivalente à efetiva mensal de 1%, ou seja, 2,01% ab, relembrando sempre que a capitalização da taxa de juros de 1% em dois meses (=1,01^2) é igual a 1,0201, que, após descontar a unidade e multiplicar por 100, chegamos a 2,01%. Logo, VP = A/i, em que A = R$25,00 e i = 2,01% ab => VP = R$1.243,78.

No caso do valor presente de um plano de perpetuidades adiantadas e diferidas, devemos modificar a fórmula de perpetuidade para poder aplicá-la. Para o caso de adiantadas, VP = A + A/i, e, para o caso diferida, VP = (A/i)/(1+i)^(q-1). Por exemplo, se as perpetuidades bimestrais do plano anterior forem adiantadas, o valor atual será igual a: VP = A + A/i, onde A = 25,00 e i = 2,01 ... => VP = 1.268,78.

Também pode-se corrigir para aplicá-la no caso de perpetuidades diferidas. Se a primeira das perpetuidades bimestrais de R$ 25,00 for paga no final do décimo mês, qual seria o VP? Nesse caso, o décimo mês é equivalente ao quinto bimestre, logo, q = 5. VP = (A/i)/ (1+i)^(q-1) = 1.148,61.

Conclui-se, portanto, que, em todo processo de análise de projetos e de decisões de investimentos, a matemática financeira possui um papel fundamental, pois, com a aplicação das técnicas certas, é possível avaliar com maior clareza e segurança os riscos inerentes a esses processos. Por isso é que se procurou estudar várias situações de investimentos e de avaliação de projetos, bem como conhecer as técnicas e a metodologia de cálculos de matemática financeira mais usada no mercado para essa finalidade.

Unidade 3 – TÉCNICAS E CÁLCULOS PARA AVALIAÇÃO DE INVESTIMENTOS E PROJETOS

Ao final desta unidade, espera-se que você seja capaz de:

- Descrever os conceitos dos indicadores: valor presente líquido (VPL), valor futuro líquido (VFL), taxa interna de retorno (TIR), índice de rentabilidade (IRT) e período de payback (PB).
- Calcular, para um dado projeto, os indicadores acima.
- Avaliar um projeto e decidir, utilizando os indicadores abordados no módulo, se o projeto deve ou não ser implementado.

3.1 Introdução à Análise de Investimento

Neste módulo introdutório sobre análise de investimentos, vamos adotar a avaliação pelo fluxo de caixa descontado. A ideia do conceito é trazer todas as receitas e as despesas associadas ao projeto para uma única data. Geralmente, trazemos todo o fluxo de caixa para a data de hoje e verificamos se o valor total das receitas de hoje é maior ou menor do que o valor total das despesas com o projeto. Caso o resultado seja positivo, o projeto é lucrativo e deve ser implementado.

A avaliação pelo fluxo de caixa descontado se caracteriza por:

- estimar fluxos futuros de caixa;
- estimar o custo de oportunidade;
- calcular os indicadores (VPL, VFL, TIR, IRT e PB);
- comparar com o preço de mercado ou com outros projetos excludentes; e
- tomar a decisão.

3.1.1 Como Estimar o Fluxo de Caixa?

Essa é uma das partes mais difíceis da avaliação de um projeto, pois é nesse momento que precisamos estimar com precisão o período e os valores de todos os ganhos e despesas futuras associadas a um projeto.

Considere apenas, para estimar o fluxo de caixa, as entradas e saídas de valores decorrentes do projeto e não despesas, como depreciação, provisões, atualizações monetárias e outras despesas contábeis. Utilize, para cada período, fluxos de caixa líquidos, para facilitar os cálculos.

Leve em consideração todos os tributos, impactos causados pelo projeto em outros setores, necessidade de capital de giro, receitas com vendas, despesas com os insumos (mesmo que este seja de propriedade da empresa), benefícios fiscais e outros.

Neste curso de matemática financeira, vamos considerar que o estudo para estimar as receitas e as despesas do projeto já foi feito e já temos o diagrama de fluxo de caixa (DFC) do projeto. O nosso objetivo é, de posse do DFC, analisar o projeto e decidir se devemos ou não implementá-lo.

3.1.2 Como Estimar o Custo de Oportunidade?

Custo de oportunidade é o custo de algo em termos de uma oportunidade renunciada, ou seja, o custo de oportunidade representa o valor associado à melhor alternativa não escolhida. É representado pela taxa de juros que iremos aplicar para trazer ao valor presente todo o fluxo de caixa do projeto.

Exemplo 1

Você possui um apartamento alugado à taxa líquida de i = 0,5% a/m do valor do imóvel e pretende vendê-lo para aplicar em um projeto. Para ser vantajoso, o novo projeto deve prever um rendimento líquido maior que 0,5% a/m (custo de oportunidade do projeto).

Para o cálculo do valor presente de todo o fluxo de caixa, é importante que mantenhamos a consistência entre o fluxo de caixa e a taxa de juros (custo de oportunidade). Se o fluxo de caixa estiver em termos reais, a taxa de juros deverá ser a taxa real; se o fluxo de caixa estiver expresso ao trimestre, a taxa de juros deverá ser a trimestral.

De posse do fluxo de caixa e do custo de oportunidade para avaliar um projeto e tomar uma decisão, precisamos agora calcular os indicadores (VPL, VFL, TIR, IRT e PB) que veremos nas seções seguintes.

3.2 Valor Presente Líquido (VPL)

O valor presente líquido, ou valor atual líquido, consiste no valor presente de um fluxo de caixa incluindo o fluxo de caixa na data t = 0.

$$VPL = CF0 + CF1 / (1+K)^1 + CF_2 / (1+K)^2 + \ldots + CF_n / (1+K)^n$$

Em que K = custo de oportunidade do projeto.
CF0 é o valor líquido de entradas e saídas no tempo t=0.
CF1 é o valor líquido de entradas e saídas no tempo t=1. CFn é o valor líquido de entradas e saídas no tempo t=n.

Um projeto prevê um investimento inicial de R$ 70.000,00 e, a partir do primeiro ano, possui entradas anuais de caixa no valor de R$ 9.000,00. Admitindo que o projeto tenha uma vida útil de 20 anos e um custo de oportunidade de 11% a.a., faça o DFC do projeto e escreva o cálculo do VPL.

Nesse caso temos:

Exemplo 2

Um projeto prevê um investimento inicial de R$ 70.000,00 e, a partir do primeiro ano, possui entradas anuais de caixa no valor de R$ 9.000,00. Admitindo que o projeto tenha uma vida útil de 20 anos e um custo de oportunidade de 11% a.a., faça o DFC do projeto e escreva o cálculo do VPL.

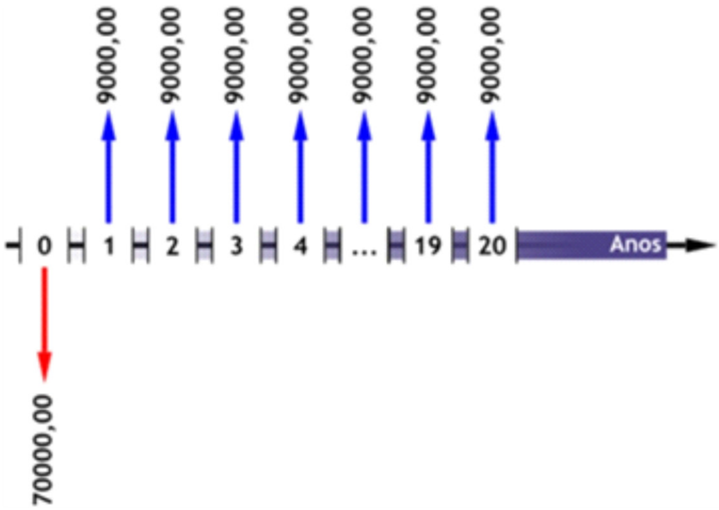
Nesse caso temos:

K = 11% a.a.

CF_0 = investimento inicial de -70.000,00

(o sinal é negativo, pois é uma saída de capital)

$CF_1 = CF_2 = CF_3 = \ldots = CF_{19} = CF_{20} = 9000{,}00$



Pela equação acima, temos:

VPL = -70000,00 + 9000,00/(1+0,11) + 9000,00/(1+0,11)^2 + 9000,00/(1+0,11)^3
9000,00/(1+0,11)^19 + 9000,00/(1+0,11)^20 = -70000,00 + 71669,95 = 1669,95

VPL determina o valor em dinheiro, hoje, do ganho ou perda do projeto.

Se VPL > 0, isso indica que as receitas do projeto superam, no valor de hoje, as despesas do projeto, logo este é lucrativo e deve ser implementado. Caso o VPL < 0, o projeto gera prejuízo e deve ser descartado. Com esse indicador, é possível também comparar dois projetos. Suponha que você precise escolher entre dois projetos, "A" e "B". O melhor projeto será o de maior VPL ou, em outras palavras, o que terá o maior ganho líquido hoje para um dado custo de oportunidade (taxa de juros) estimado.

Exemplo 3

Dados dois projetos A e B com o fluxo de caixa descrito na tabela abaixo, com custo de oportunidade de 10% a.a., determine o melhor projeto.

Ano	Projeto A	Projeto B
t=0	-R$ 100,00	-R$ 100,00
t=1	R$ 80,00	R$10,00
t-2	R$ 50,00	R$ 10,00
t=3	R$ 10,00	R$ 130,00

Temos para o projeto A: CF 0 =-100,00, CF 1 = 80,00, CF 2 = 50,00 e CF 3 = 10,00; e para o projeto B: CF 0 =-100,00, CF 1 = 10,00, CF 2 = 10,00 e CF 3 = 130,00. O custo de oportunidade foi dado k = 10% a.a. e, como o fluxo de caixa também é anual, podemos utilizar diretamente a equação do VPL.

VPL (A) = -100,00 + 80,00/(1+0,10) + 50,00/(1+0,10)^2 + 10,00/(1+0,10)^3 = 21,56

VPL (B) = -100,00 + 10,00/(1+0,10) + 10,00/(1+0,10)^2 + 130,00/(1+0,10)^3 = 15,03

Portanto, para o custo de oportunidade de 10% a.a., o melhor projeto é o "A".

Esse indicador tem algumas propriedades interessantes, como o fato de ser aditivo, ou seja, o valor presente da soma de dois projetos (A+B) é igual ao valor presente do primeiro projeto (A) mais o valor presente do segundo projeto (B).

VPL (A+B) = -VPL(A) + VPL(B)

Em que A e B são ativos ou projetos.

Exemplo 4

Utilizando o exemplo anterior, temos o seguinte fluxo de caixa para o projeto (A+B): CF 0 = -200,00; CF 1 = 90,00; CF 2 = 60,00 e CF 3 = 140,00; logo, utilizando a equação do VPL, temos: e

VPL (A) = -200,00 + 90,00/(1+0,10) + 60,00/(1+0,10)^2 + 140,00/(1+0,10)^3 = 36,59

VPL (A) + VPL(B) = 21,56 + 15,03 = 36,59

Uma observação importante é que a decisão depende do custo de oportunidade estimado: dependendo do valor da taxa, a decisão pode ser outra. Como exercício, refaça os exemplos utilizando o custo de oportunidade k = 5% a.a.

3.3 Valor Futuro Líquido (VFL)

O valor futuro líquido é apenas o VPL expresso numa data futura específica, geralmente, a data do último fluxo de caixa. Assim como no valor presente líquido (VPL), se VFL > 0, isso indica que as receitas do projeto superam, no valor de hoje, as despesas do projeto, logo, este é lucrativo e deve ser implementado. Caso o VFL < 0, o projeto gera prejuízo e deve ser descartado. É possível também comparar dois projetos, basta que a comparação entre os VFL seja na mesma data futura. O melhor projeto será o de maior VFL.

Para um período qualquer t = m, o VFL é dado pela equação abaixo:

$$VFL_m = CF_0 *(1+k)\hat{}m + CF_1 *(1+k)\hat{}(m-1) + CF_2 *(1+k)\hat{}(m-2) + \ldots + CF_n *(1+k)\hat{}(m-n)$$

Exemplo 5

Utilizando ainda o Exemplo 3, vamos calcular o VFL para o período t=3, para ambos os projetos.

VFL3 (A) = -100,00*(1+0,10)^3 + 80,00*(1+0,10)^2 + 50,00*(1+0,10)^1 + 10,00 = 28,70

VFL3 (B) = -100,00*(1+0,10)^3 + 10,00*(1+0,10)^2 + 10,00*(1+0,10)^1 + 130,00 = 20,00

Logo, o melhor projeto, dado o custo de oportunidade de 10% a.a., é o projeto "A".

Exemplo 6

Podemos calcular o VFL para qualquer período, vamos calcular para t=2.

VFL2 (A) = -100,00*(1+0,10)^2 + 80,00*(1+0,10)^1 + 50,00*(1+0,10)^0 + 10,00*(1+0,1)^(-1) = -100,00*(1+0,10)^2 + 80,00*(1+0,10)^1 + 50,00 + 10,00/(1+0,1)^1 = 26,09

VFL2 (B) = -100,00*(1+0,10)^2 + 10,00*(1+0,10)^1 + 10,00*(1+0,10)^0 + 130,00*(1+0,1)^(-1) = -100,00*(1+0,10)^2 + 10,00*(1+0,10)^1 + 10,00 + 130,00/(1+0,1) = 18,18

Logo, o melhor projeto, dado o custo de oportunidade de 10% a.a., é o projeto "A".

De forma análoga ao valor presente líquido (VPL), o valor futuro líquido (VFL) também é aditivo, ou seja, dados dois projetos distintos A e B, temos:

VFL(A+B) = VFL(A) = VFL(B)

Em que A e B são ativos ou projetos.

3.4 Taxa Interna de Retorno (TIR)

A taxa interna de retorno (TIR) é a taxa de juros que torna o VPL de um projeto igual à zero. Podemos dizer que é a taxa intrínseca do projeto. Dado um fluxo de caixa qualquer, a TIR representa a rentabilidade de um projeto e é independente do seu custo de oportunidade. Esse conceito é geralmente subjetivo, mas, para analisar um projeto por esse indicador, vamos ter que estimar o custo de oportunidade (k) para comparar com a TIR do projeto.

Se a TIR > k (custo de oportunidade), devemos implementar o projeto, caso contrário, o projeto não é interessante. Vale lembrar que, como a TIR é uma taxa, só devemos comparar TIR de projetos distintos, se estes possuem o mesmo nível de risco.

A TIR, diferentemente do VPL e do VFL, não é aditiva, ou seja, a TIR(A+B) ‘“ TIR(A) + TIR(B). E também pode não ter um solução única, ou seja, é possível que para um mesmo projeto, ao resolver o problema, se encontrem duas ou mais taxas positivas. Caso isso ocorra, o método deve ser descartado.

Para encontrar a TIR, é preciso resolver o seguinte problema, no qual a variável a ser encontrada é a taxa i:

$$Cf_0 + CF_1 /(1+i)^1 + CF_2 /(1+i)^2 + ... + CF_n / (1+i)^n = 0$$

Observe que a equação acima, se substituirmos i por k, equivale à equação do VPL, apenas impondo o valor zero para o valor presente líquido. Note também que a equação é uma equação de n-ésimo grau e, portanto, pode ter até n raízes, ou seja, n soluções. Essa equação deve ser resolvida utilizando algoritmos numéricos, por exemplo, por meio da função TIR do aplicativo Microsoft Excel.

3.5 Índice de Rentabilidade (IRT)

O índice de rentabilidade (IRT), ou índice custo-benefício, é definido pela razão entre o valor presente dos futuros fluxos, descontada a taxa de custo de oportunidade k, pelo fluxo em t=0. Representa o valor do benefício do projeto pelo seu custo.

$$IRT = [CF_1 / (1+k)^1 + CF_2 / (1+k)^2 + ... + CF_n / (1+k)^n] / CF_0$$

Se IRT > 1, adquira o projeto, pois o valor do benefício do projeto é maior que seu custo. Para comparar projetos utilizando o IRT, basta escolher o projeto com maior IRT.

Exemplo 7

Utilizando ainda o Exemplo 3, podemos calcular o IRT para os projetos A e B.

$$IRT(A) = [80{,}00/(1+0{,}10)^1 + 50{,}00/(1+0{,}10)^2 + 10{,}00/(1+0{,}10)^3] / 100{,}00 = 1{,}22$$

$$IRT(B) = [10{,}00/(1+0{,}10)^1 + 10{,}00/(1+0{,}10)^2 + 130{,}00/(1+0{,}10)^3] / 100{,}00 = 1{,}15$$

Logo, o projeto A possui maior rentabilidade, ou seja, uma melhor relação custo-benefício.

Na prática, o IRT corresponde ao multiplicador da riqueza disponível ao investidor após a realização do projeto. Por exemplo, se o IRT calculado for 1,5, podemos considerar que para cada R$ 1,00 de patrimônio da empresa, agora, este patrimônio estará valendo R$ 1,50.

Assim como na TIR, o IRT não é aditivo e, portanto, IRT(A+B) ‘“ IRT(A) + IRT(B).

3.6 Método Payback (PB)

Neste método, estamos apenas interessados em saber em quanto tempo vamos recuperar o investimento inicial do projeto, ou seja, o período de payback . Esse é o prazo para recuperar o investimento inicial do projeto. O método é muito criticado, pois não leva em conta o valor do dinheiro ao longo do tempo e nem a distribuição do fluxo de caixa.

Exemplo 8

No projeto A, temos um investimento inicial de R$ 5.000,00 e receitas futuras de R$ 4.500,00 no primeiro ano, R$ 500,00 no terceiro ano, R$ 200,00 no quarto ano e R$ 100,00 no quinto ano. Para o projeto B, temos também um investimento inicial de R$ 5.000,00 e receitas futuras de R$ 1.000,00 no segundo ano, R$ 3.000,00 no terceiro ano, R$ 4.000,00 no quarto ano e R$ 7.000,00 no quinto ano.

Ano	Projeto A	Projeto B
t=0	-R$ 5.000,00	-R$ 5.000,00
t=1	R$ 4.500,00	R$ 0,00
t=2	R$ 0,00	R$ 1.000,00
t=3	R$ 500,00	R$ 3.000,00
t=4	R$ 200,00	R$ 4.000,00
t=5	R$ 100,00	R$ 7.000,00

Se formos analisar os projetos acima por esse método, veremos que, para o projeto A, vamos recuperar o investimento inicial após o terceiro ano (n do projeto A = 3), pois no primeiro ano temos R$ 4.500,00 e no terceiro ano mais R$ 500,00, o que nos daria os R$ 5.000,00 aplicados inicialmente.

Para o Projeto B, teremos n = 4, pois temos R$ 1.000,00 no segundo ano mais R$ 3.000,00 no terceiro ano, mais R$ 4.000,00 no quarto ano, somando, é fornecido um valor maior ou igual ao valor inicial aplicado (R$ 8.000,00 e” R$ 5.000,00).

Apesar de o projeto B ser claramente melhor do que o projeto A, por esse critério, escolheríamos o projeto A, que possui o menor prazo para recuperar o investimento inicial (n A = 3 e n B = 4). Por não levar em consideração os resultados gerados pelos projetos após o período de *Payback,* o método tende a penalizar projetos de maturação mais longa. Entretanto, este pode ser utilizado como indicador complementar, por exemplo, para um critério de desempate entre dois ou mais projetos, ou quando o fator tempo de retorno for muito relevante, como no caso de projetos em áreas envolvendo alto risco político.

Conclusão

Nesta unidade, vimos que, em todo processo de análise de projetos e de decisões de investimentos, a matemática financeira possui um papel fundamental, pois, com a aplicação das técnicas certas, é possível avaliar com maior clareza e segurança os riscos inerentes a esses processos. Por isso, procuramos estudar várias situações de investimentos e de avaliação de projetos, e conhecemos as técnicas e a metodologia de cálculos de matemática financeira mais usadas no mercado para essa finalidade.